

Aanvullend materiaal

Inleiding

Deze korte aanvulling biedt u materiaal dat nuttig is voor sommige lezers van *Statistiek in de praktijk*. Het materiaal is vanwege de lengte uit de hoofdtekst verwijderd en bestaat uit drie delen:

1. Paragraaf 2.6 over het *transformeren van relaties*. Dit is bedoeld als vervolg op paragraaf 2.5 waarmee hoofdstuk 2 nu eindigt. De nummering van figuren, voorbeelden en tabellen sluit aan op die van hoofdstuk 2. Ook de nummering van de oefeningen sluit aan op die van hoofdstuk 2. Dit is inclusief de oefeningen die op het hoofdstuk terugblikken.
2. De aanvulling op paragraaf 4.5 bespreekt in het kort de *beslissingsanalyse*. De natuurlijke plek voor dit materiaal is direct na de discussie over boomdiagrammen in *Statistiek in de praktijk*, bladzijde 214. We hebben de voorbeelden en figuren zo genummerd dat deze op de nummering in hoofdstuk 4 aan sluiten.
3. De aanvulling op hoofdstuk 3 gaat over *data-ethiek*. Dit sluit naadloos aan op paragraaf 3.3, maar is hier geplaatst aan het einde van het hoofdstuk als paragraaf 3.5. Oefeningen en voorbeelden zijn zodanig genummerd dat deze aansluiten op die van hoofdstuk 3.

2.6 Transformeren van relaties

Laten we opnieuw voorbeeld 2.14 bekijken. Wat is bij zoogdieren de relatie tussen het hersengewicht en het lichaamsgewicht? Figuur 2.32 (een herhaling van figuur 2.15) is een spreidingsdiagram van het hersengewicht afgezet tegen het lichaamsgewicht van 96 soorten zoogdieren.¹ De lijn is de kleinste-kwadratenlijn voor het voorspellen van hersengewicht op basis van lichaamsgewicht. De uitschieters zijn interessant. We zeggen soms dat dolfinnen en mensen slim, nijlpaarden dom en Afrikaanse olifanten alleen maar groot zijn. Dat komt omdat dolfinnen en mensen grotere hersenen hebben dan hun lichaamsgewicht doet veronderstellen, terwijl nijlpaarden kleinere hersenen hebben en de olifant veel zwaarder is dan enig ander zoogdier qua lichaam en qua hersenen.

Voorbeeld 2.29

Het diagram in figuur 2.32 voldoet niet. De meeste zoogdieren zijn zo klein in relatie tot olifanten en nijlpaarden dat hun punten elkaar overlappen en een kluitje vormen in de linker benedenhoek van het diagram. De correlatie tussen hersengewicht en lichaamsgewicht is $r = 0,86$ maar dat is misleidend. Als we de olifant weglaten, is de correlatie voor de andere 95 soorten $r = 0,50$. Figuur 2.33 is een spreidingsdiagram van de gegevens zonder de vier uitschieters. Dit geeft een betere kijk op de andere 92 waarnemingen. We zien nu dat de relatie niet lineair verloopt. Er is sprake van een buiging naar rechts naarmate het lichaamsgewicht toeneemt.

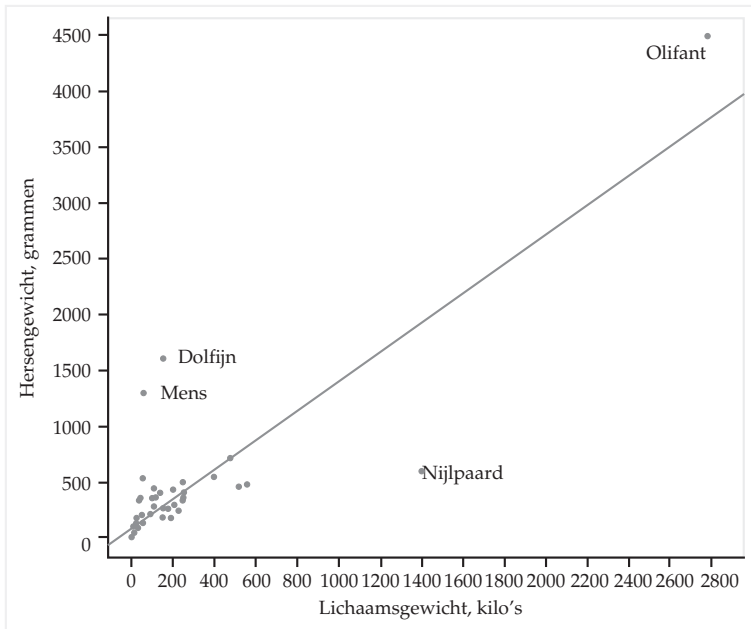
Biologen weten dat gegevens over afmetingen vaak beter hanteerbaar zijn als we logaritmen nemen voordat we meer analyses maken. Figuur 2.34 toont de logaritme van het hersengewicht afgezet tegen de logaritme van het lichaamsgewicht voor alle 96 soorten. Het effect is bijna wonderbaarlijk. Er is niet langer sprake van extreme uitschieters of van invloedrijke waarnemingen. Het patroon is zeer lineair met als correlatie $r = 0,96$. De verticale spreiding op de kleinste-kwadratenlijn is overal gelijk zodat de voorspelling van het hersengewicht uit het lichaamsgewicht ongeveer even exact is bij elk lichaamsgewicht (in de logaritmeschaal).

Voorbeeld 2.29 laat zien dat het werken met een *functie* van onze oorspronkelijke metingen onze statistische analyse behoorlijk kan vereenvoudigen. Het toepassen van een functie zoals een logaritme of vierkantswortel op een kwantitatieve variabele wordt het **transformeren** of **omrekenen** van gegevens genoemd. In deze paragraaf zullen we zien dat een begrip van eenvoudige functies ons helpt bij het kiezen en gebruiken van transformaties. Omdat we misschien de verklarende variabele x of de te verklaren variabele y , of beide, in een spreidingsdiagram willen transformeren, hebben we het over de variabele t wanneer we in het algemeen over transformatie spreken.

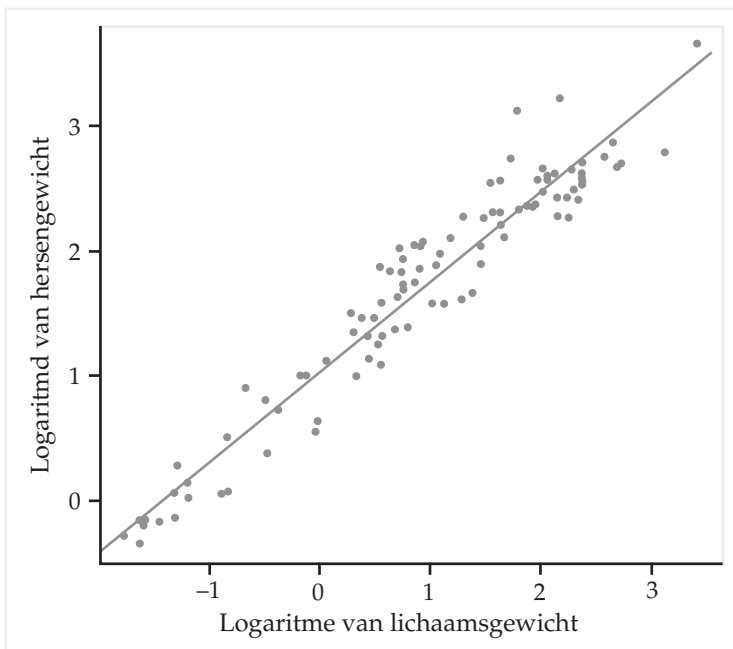
2.6.1 De eerste stappen bij transformatie

Het transformeren van gegevens houdt een verandering in van de meetschaal die werd gebruikt toen de gegevens werden verzameld. We kunnen bij het meten van temperatuur kiezen tussen graden Fahrenheit of graden Celsius, bij afstand tussen mijlen of kilometers. Deze veranderingen van eenheden zijn *lineaire transformaties*. Ze werden eerder besproken in paragraaf 1.2. **Lineaire transformatie kan een kromlijnige relatie tussen twee variabelen niet lineair maken.** Om dat te doen, nemen we onze toevlucht tot functies die niet lineair zijn. De

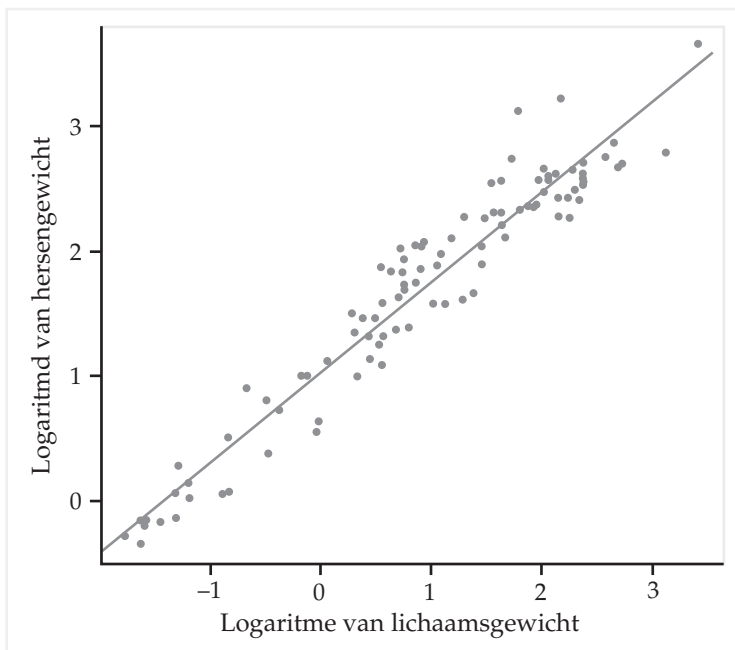




Figuur 2.32 Spreidingsdiagram van hersengewicht afgezet tegen lichaamsgewicht voor 96 soorten zoogdieren.



Figuur 2.33 Spreidingsdiagram van hersengewicht afgezet tegen lichaamsgewicht voor zoogdieren, met weglating van de uitschieters.



Figuur 2.34 Spreidingsdiagram van de logaritme van hersengewicht afgezet tegen de logaritme van lichaamsgewicht voor 96 soorten zoogdieren.

logaritme, toegepast in voorbeeld 2.9, is een niet-lineaire functie. Hier volgen nog wat andere functies.

- Hoe meten we de omvang van een bol of van bij benadering bolvormige objecten, zoals zandkorrels of bellen, in een vloeistof? De omvang van een bol kan worden uitgedrukt in termen van de diameter t , in termen van oppervlak (evenredig aan t^2) of in termen van volume (evenredig aan t^3). Elk van deze *machten* van de diameter komt in een specifieke situatie in aanmerking.
- In de VS meet men gewoonlijk het benzineverbruik van een auto in het aantal mijlen per gallon – d.w.z. het aantal mijlen dat een auto op een gallon benzine rijdt. Amerikaanse ingenieurs meten liever in gallons per mijl – d.w.z. het aantal gallons benzine dat een auto verbruikt om 1 mijl te rijden. Dit noemen we een terugtransformatie. Een auto die 25 mijl per gallon verbruikt

$$\frac{1}{\text{mijlen per gallon}} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ gallons per mijl}$$

De terugtransformatie is een *negatieve macht* $1/t = t^{-1}$.

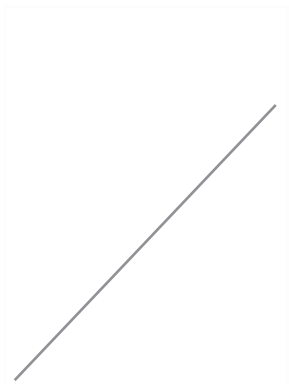
De transformaties die we al noemden – lineair, positieve en negatieve machten, en logaritmen – worden bij de meeste statistische vraagstukken gebruikt. Zij zijn allemaal *monotoon*.

MONOTONE FUNCTIES

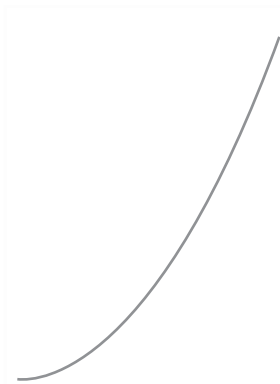
Een **monotone functie** $f(t)$ beweegt zich in één richting naarmate haar argument t groter wordt.

Een **monotoon stijgende functie** laat de volgorde van de gegevens intact. Dat wil zeggen als $a > b$ dan is $f(a) > f(b)$.

Een **monotoon dalende functie** keert de volgorde van de gegevens om. Dat wil zeggen als $a > b$ dan is $f(a) < f(b)$.



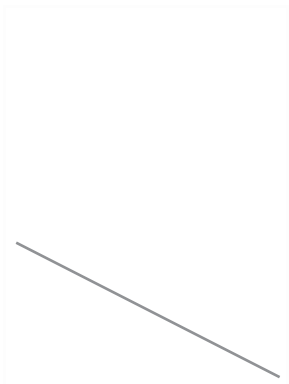
Lineair, positieve helling



Kwadraat



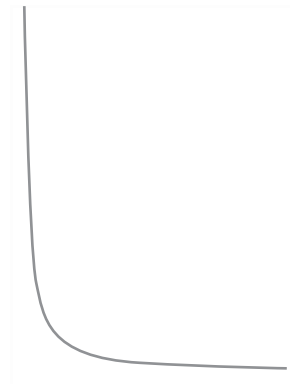
Logaritme



Lineair, negatieve helling



Reciproque vierkantswortel



Reciproque

Figuur 2.35 Monotone functies, stijgend (bovenste rij) en dalend (onderste rij).

De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn. De grafiek van een monotoon stijgende functie stijgt overall. Een monotoon dalende functie heeft een grafiek die overall daalt. Een functie kan monotoon zijn binnen een bepaald bereik van t zonder overall monotoon te hoeven zijn. De kwadraatfunctie t^2 stijgt bijvoorbeeld monotoon voor $t \geq 0$. Als het bereik van t zowel

positieve als negatieve waarden bevat, is het kwadraat niet monotoon. Het daalt als t stijgt bij negatieve waarden van t en stijgt als t stijgt bij positieve waarden.

Figuur 2.35 vergelijkt drie monotoon stijgende functies en drie monotoon dalende functies bij positieve waarden van argument t . Veel variabelen nemen slechts 0 of positieve waarden aan, dus zijn we bijzonder geïnteresseerd in de vraag hoe functies zich gedragen bij positieve waarden van t . De stijgende functies zijn

Lineair	$a + bt$, helling $b > 0$
Kwadraat	t^2
Logaritme	$\log t$

De dalende functies in de onderste rij van figuur 2.35 zijn

Lineair	$a + bt$, helling $b < 0$
Reciproque vierkantswortel	$1/\sqrt{t}$, of $t^{-1/2}$
Reciproque	$1/t$, of t^{-1}

Niet-lineaire monotone transformaties veranderen de gegevens in voldoende mate om de vorm van de verdelingen en de vorm van de relaties tussen twee variabelen te veranderen. Toch zijn ze eenvoudig genoeg om de volgorde intact te laten en de terugkeer naar de oorspronkelijke gegevens mogelijk te maken. We gaan ons concentreren op machten en logaritmen. De machten met even getallen t^2 , t^4 enzovoort, zijn monotoon stijgend voor $t \geq 0$, tenzij t zowel negatieve als positieve waarden kan aannemen. De logaritme is niet even bepaald tenzij $t > 0$. Onze strategie voor het transformeren van gegevens is daarom als volgt:

- Als de variabele die wordt getransformeerd, waarden aanneemt die 0 of negatief zijn, past u eerst een lineaire transformatie toe door alle waarden positief te maken. Vaak voegen we dan eenvoudig een constante aan alle waarnemingen toe.
- Vervolgens kiezen we een machts- of logaritmische transformatie die de gegevens vereenvoudigt, bijvoorbeeld een functie die een spreidingsdiagram bij benadering lineair maakt.

2.6.2 De ladder van de machtstransformaties

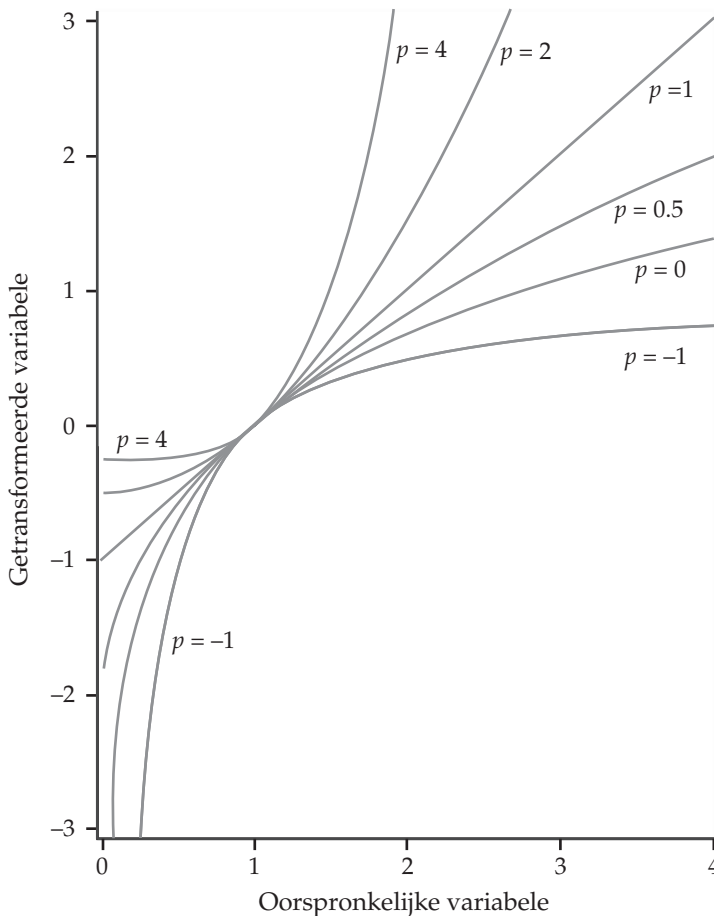
Hoewel ze qua algebraïsche formule eenvoudig en gemakkelijk met een rekenmachine zijn te berekenen, gedragen machten en logaritmische functies zich verschillend. Het ligt voor de hand om bij machten als

$$\dots, t^{-1}, t^{-1/2}, t^{1/2}, t, t^2, \dots$$

te denken aan een hiërarchie of ladder. Sommige feiten over deze ladder helpen ons bij de keuze van transformaties. We kijken altijd alleen maar naar de positieve waarden van het argument t .

MONOTONIE VAN MACHTSFUNCTIES

Machtsfuncties t^p voor positieve machten p zijn monotoon stijgend voor waarden $t > 0$. Zij laten de volgorde van waarneming intact. Dat geldt ook voor de logaritme. Machtsfuncties voor negatieve machten p zijn monotoon dalend voor waarden $t > 0$. Zij keren de volgorde van de waarnemingen om.



Figuur 2.36 De ladder van de transformaties van machten en logaritmen Voor een eenvoudiger vergelijking zijn de functies zodanig op schaal weergegeven dat ze elkaar kruisen bij $t = 1$ en op dat punt als helling 1 hebben.

Het is lastig om grafieken te interpreteren als de volgorde van de oorspronkelijke waarnemingen wordt omgedraaid. We kunnen een negatieve macht zoals de reciproque $1/t$ eerder monotoon stijgend maken dan monotoon dalend door te werken met $-1/t$. Figuur 2.36 brengt

deze gedachte een stap verder. Deze grafiek vergelijkt de ladder van machtsfuncties in de formule

$$\frac{t^p - 1}{p}$$

De reciproque (macht $p = -1$), bijvoorbeeld, ziet er grafisch uit als

$$\frac{1/t - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{t}$$

Deze lineaire transformatie verandert niet de aard van de machtsfuncties t^p , behalve dat ze nu allemaal monotoon stijgend zijn. Er is voor gekozen dat iedere macht de waarde 0 heeft bij $t = 1$ en ook een helling 1 heeft bij dat punt. Dus raken de lijnen in figuur 2.36 elkaar allemaal bij $t = 1$. Ze gaan door dat punt bij dezelfde helling.

Kijk naar de lijn $p = 0$ in figuur 2.36. De 0e macht t^0 is precies de constante 1, die niet erg bruikbaar is. De lijn $p = 0$ in de figuur is niet constant. Feitelijk is het de logaritme $\log t$. Dat wil zeggen, **de logaritme past op de ladder van machtstransformaties bij $p = 0$.**²

Figuur 2.36 toont nog een ander belangrijk feit over deze functies. De lijn van een lineaire functie (macht $p = 1$) is een rechte. Machten groter dan 1 geven lijnen die naar boven afbuigen. Dat wil zeggen, de getransformeerde variabele groeit sneller als t groter wordt. Machten kleiner dan 1 geven lijnen die naar beneden afbuigen. De getransformeerde waarden blijven groeien met t , maar in een verhouding die afneemt als t toeneemt. Bovendien neemt de scherpte van de kromming toe als we ons in welke richting dan ook verwijderden van $p = 1$.

CONCAVITEIT VAN MACHTSFUNCTIES

Machtstransformaties t^p voor machten p groter dan 1 zijn hol naar boven, d.w.z., ze hebben de vorm \cup . Deze transformaties steken de rechterstaart van een verdeling uit en houden de linkerstaart in. Dit effect wordt sterker naarmate de macht p zich verder naar boven van 1 af beweegt.

Machtstransformaties t^p voor machten p kleiner dan 1 (en de logaritme voor $p = 0$) zijn hol naar beneden; d.w.z. ze hebben de vorm \cap . Deze transformaties houden de rechterstaart van een verdeling in en steken de linkerstaart uit. Dit effect wordt sterker naarmate de macht p zich verder naar beneden van 1 af beweegt.

Voorbeeld 2.30

Figure 2.37(a) is een spreidingsdiagram van gegevens van de Wereldbank.³ De individuen zijn alle landen van de wereld waarvan gegevens beschikbaar zijn. De verklarende variabele x is een maat voor de rijkdom van een land: het bruto binnenlands product (BBP) per hoofd. BBP is de totale waarde van goederen en diensten, geproduceerd in een land, omgerekend in dollars. De te verklaren variabele y is de levensverwachting bij de geboorte.

De levensverwachting neemt in rijkere landen toe, zij het slechts tot een bepaald punt. Het patroon in figuur 2.37(a) laat eerst een snelle stijging zien als het BBP toeneemt maar vlakt vervolgens af. Drie Afrikaanse landen (Botswana, Gabon en Namibië) zijn uitschieters met een veel lagere

levensverwachting dan het totale patroon veronderstelt. Kan het patroon als geheel door transformatie lineair worden gemaakt?

Levensverwachting heeft geen groot bereik maar we zien dat de verdeling van het BBP rechts-scheef is en erg verspreid. Dus is het BBP een goede kandidaat voor transformatie. We gaan de rechterstaart intrekken, dus proberen we transformaties met $p < 1$. Figuur 2.37(b), (c) en (d) laten de uitkomsten zien van drie transformaties van het BBP. De r -waarde in elke figuur is de correlatie als de drie uitschieters worden weggelaten.

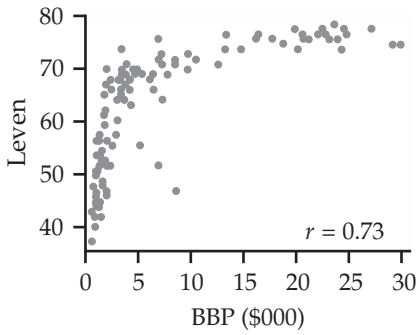
De vierkantswortel \sqrt{x} met $p = 1/2$ vermindert de kromming van het spreidingsdiagram, maar niet in voldoende mate. De logaritme $\log x$ ($p = 0$) zorgt dat het patroon meer lineair verloopt, maar het helt nog naar rechts. De reciproque vierkantswortel $1/\sqrt{x}$ met $p = -1/2$ geeft een patroon dat helemaal lineair is behalve voor wat betreft de uitschieters. Om te voorkomen dat de volgorde van de waarnemingen wordt omgedraaid, gebruiken we in feite $-1/\sqrt{x}$.

Voorbeeld 2.30 toont de ladder van machten in bedrijf. Als we de ladder van de lineaire transformaties afdalen (macht $p = 1$), wordt het spreidingsdiagram meer lineair. Dalen we verder de ladder af, naar de reciproque $1/x = x - 1$, dan helt het diagram naar de andere kant over. Maar deze benadering van proberen en kijken wat er gebeurt, voldoet niet. Dat levensverwachting lineair afhangt van $1/\sqrt{\text{BBP}}$ draagt niet bij aan meer kennis van de relatie tussen de gezondheid en de rijkdom van landen. We raden af om zomaar op de knoppen van de rekenmachine te drukken om een spreidingsdiagram meer lineair te laten verlopen.

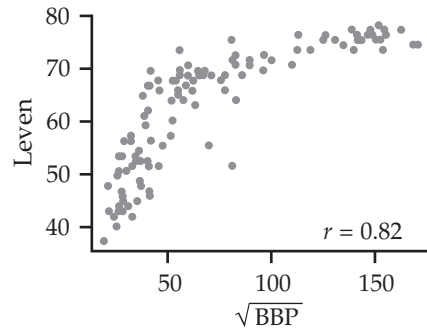
Het is veel bevredigender om te beginnen met een theorie van een wiskundig model waarvan we verwachten dat deze een relatie beschrijft. De transformatie die nodig was om de relatie lineair te maken is dan een consequentie van het model. Een van de zeer gebruikelijke modellen is *exponentiële groei*.

2.6.3 Exponentiële groei

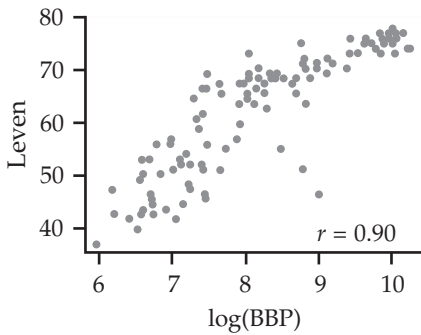
Een variabele groeit lineair in de tijd als er in elke gelijke periode een vaste toename bij wordt *opgeteld*. **Exponentiële groei** heeft plaats als een variabele in elke tijdsperiode met een vast getal wordt *vermenigvuldigd*. Om het effect van de multiplicatieve groei te vatten, beschouwen we een populatie van bacteriën waarbij iedere bacterie zich elk uur in tweeën splitst. Beginnend met één bacterie, hebben we er na een uur 2, na twee uur 4, na drie uur 8, dan 16, 32, 64, 128, enzovoort. Deze eerste getallen zijn misleidend. Na een dag van elk uur verdubbelen zijn er 2^{24} , oftewel 16.777.216, bacteriën in de populatie. Dat aantal wordt dan in het volgende uur verdubbeld! Probeer maar eens op een rekenmachine herhaaldelijk te vermenigvuldigen met 2 en zie zelf de snelle toename na een langzame start. Figuur 2.38 laat de groei van de bacteriepopulatie over een periode van 24 uur zien. Gedurende de eerste 15 uur is de populatie te klein om zichtbaar boven het nulniveau van de grafiek uit te komen. Het is karakteristiek voor exponentiële groei dat de stijging gedurende lange tijd langzaam lijkt te gaan en dan schijnt te exploderen.



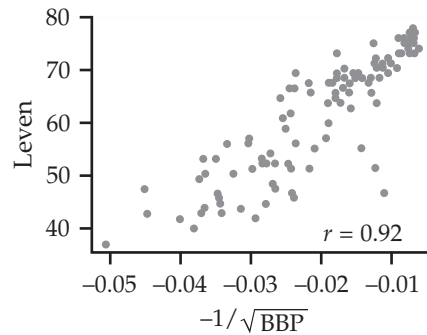
(a)



(b)



(c)



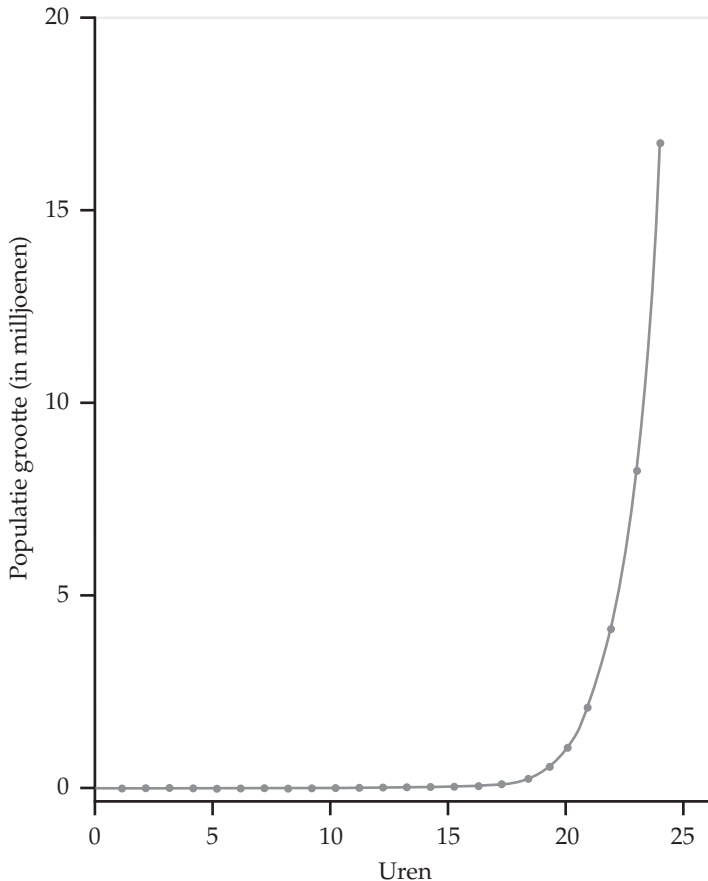
(d)

Figuur 2.37 De ladder van transformaties in bedrijf. De gegevens zijn levensverwachting en bruto binnenlands product (BBP) voor 115 landen. Diagram (a) toont de oorspronkelijke gegevens. In de diagrammen (b), (c) en (d) wordt het BBP getransformeerd. We dalen de ladder af, weg van lineaire functies.

LINEAIRE GROEI VERSUS EXPONENTIELE GROEI

Lineaire groei stijgt per tijdsperiode met een vaste hoeveelheid; exponentiële groei stijgt met een vast percentage van het voorafgaande totaal.

Populaties van levende dingen – zoals bacteriën – hebben de neiging exponentieel te groeien als ze niet worden weerhouden door uitwendige beperkingen zoals gebrek aan voedsel of ruimte. Plezieriger is echter dat ook geld een exponentiële groei laat zien wanneer een investering rente op rente oplevert.



Figuur 2.38 Groei van een populatie bacteriën die zich elk uur verdubbelt.

Voorbeeld 2.31

Een dollar die tegen een jaarlijkse rente van 6% is geïnvesteerd, groeit in een jaar tot \$1,06. De oorspronkelijke dollar blijft staan en heeft \$0,06 aan rente verdiend. Dat wil zeggen: een jaarlijkse rente van 6% betekent dat elk voor een vol jaar ingelegd bedrag vermenigvuldigd wordt met 1,06. Als de \$1,06 nog een tweede jaar geïnvesteerd blijft, is het nieuwe bedrag daarom gelijk aan $1,06 \times 1,06$, ofwel $1,06^2$. Dat is slechts \$1,12, maar dit wordt in het derde jaar op zijn beurt weer vermenigvuldigd met 1,06, enzovoort.

Als de indianen die in 1626 het eiland Manhattan voor \$24 verkochten, die \$24 hadden gestort op een spaarrekening met een jaarlijkse rente van 6%, dan zouden ze nu meer dan \$40 miljard bezitten. Onze spaarrekeningen maken van ons geen miljonairs omdat we niet lang genoeg in leven blijven. Een eeuw groei tegen een jaarlijkse rente van 6% verandert \$24 in \$8143. Dat is $1,06^{100}$ maal \$24. In 1826, twee eeuwen na de verkoop, zou er iets meer dan \$2,7 miljoen op de rekening staan. Pas na 302 jaar geduldig wachten, bereiken we eindelijk de \$1 miljard. Dat is veel geld, maar 302 jaar is ook een lange tijd.

De telling van bacteriën na x uur bedraagt x . De waarde van \$24 gedurende x jaar vastgezet tegen 6% rente is $24 \times 1,06^x$. Twee voorbeelden van het **exponentiële groeimodel** $y = a \times b^x$ voor verschillende constanten a en b . In dit model wordt de uitkomst y vermenigvuldigd met b in elke tijdsperiode.

Jaar	Mbbl.	Jaar	Mbbl.	Jaar	Mbbl.
1880	30	1945	2.595	1976	20.188
1890	77	1950	3.803	1978	21.922
1900	149	1955	5.626	1980	21.722
1905	215	1960	7.674	1982	19.411
1910	328	1962	8.882	1984	19.837
1915	432	1964	10.310	1986	20.246
1920	689	1966	12.016	1988	21.338
1925	1.069	1968	14.104	1990	22.100
1930	1.412	1970	16.690	1992	22.028
1935	1.655	1972	18.584	1994	22.234
1940	2.150	1974	20.389	1996	23.380
				1998	24.441

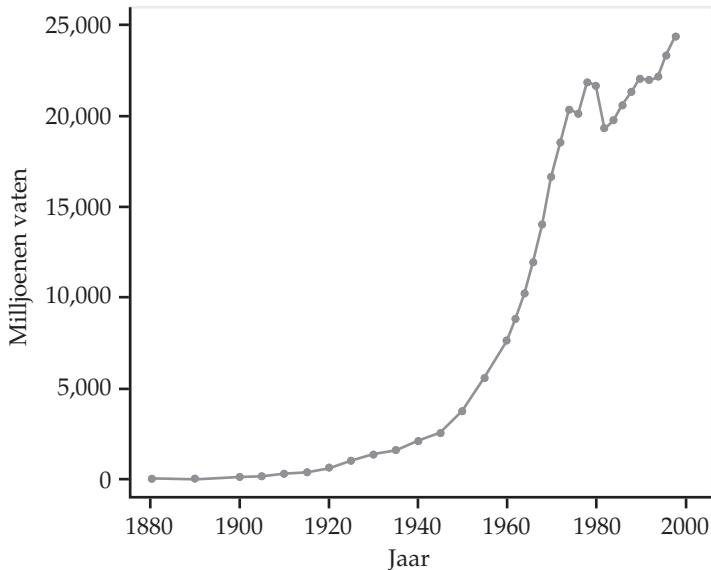
Tabel 2.10 Wereldproductie van ruwe aardolie 1880–1998 (miljoenen barrels)

Voorbeeld 2.32

Beschrijft het exponentiële groeimodel soms werkelijke gegevens die niet voortkomen uit een of ander voortdurend vermenigvuldigingsproces met een vast getal? Laten we eens kijken naar de wereldproductie van olie. Ruwe olie is de belangrijkste energiebron voor de ontwikkelde landen en is soms oorzaak van economische ontwrichting en zelfs oorlog. Tabel 2.10 en figuur 2.39 tonen de jaarlijkse groei van de wereldproductie aan ruwe olie, gemeten in miljoenen vaten per jaar.⁴ Er is sprake van een toenemende trend, al is het totale patroon niet lineair. De olieproductie is veel sneller toegenomen dan de lineaire groei. Het groeipatroon vertoont een gladde kromme tot 1973, toen de oorlog in het Midden Oosten tot een forse prijsstijging en verandering in het voorgaande productiepatroon leidde. Feitelijk leek de kromme van de olieproductie vanaf 1880 tot en met 1973 grotendeels op een exponentiële kromme. Is dit een exponentiële groei?

2.6.4 De logaritmische transformatie

We kunnen de vermenigvuldiging aan het werk zien bij de groei van een biologische populatie en bij geld dat tegen samengestelde interest op een rekening is gestort. Het is niet verbazingwekkend dat het exponentiële model bij deze gevallen past. Maar in het geval van de wereldproductie van olie is er geen duidelijke vermenigvuldiging aan de gang. Gaat het hier werkelijk om exponentiële groei? De vorm van de groeikromme voor olieproductie in figuur 2.38 lijkt inderdaad globaal op de exponentiële kromme van figuur 2.39. Maar onze ogen zijn niet erg goed in het vergelijken van krommen die ruwweg dezelfde vorm hebben. We hebben een betere manier nodig om vast te stellen of de groei exponentieel is. Onze ogen zijn wel goed in het beoordelen of punten al dan niet op een rechte lijn liggen. Daarom passen



Figuur 2.39 Wereldproductie van ruwe olie vanaf 1880 tot en met 1998. De tijdgrafiek vertoont tot 1973 een regelmatig patroon.

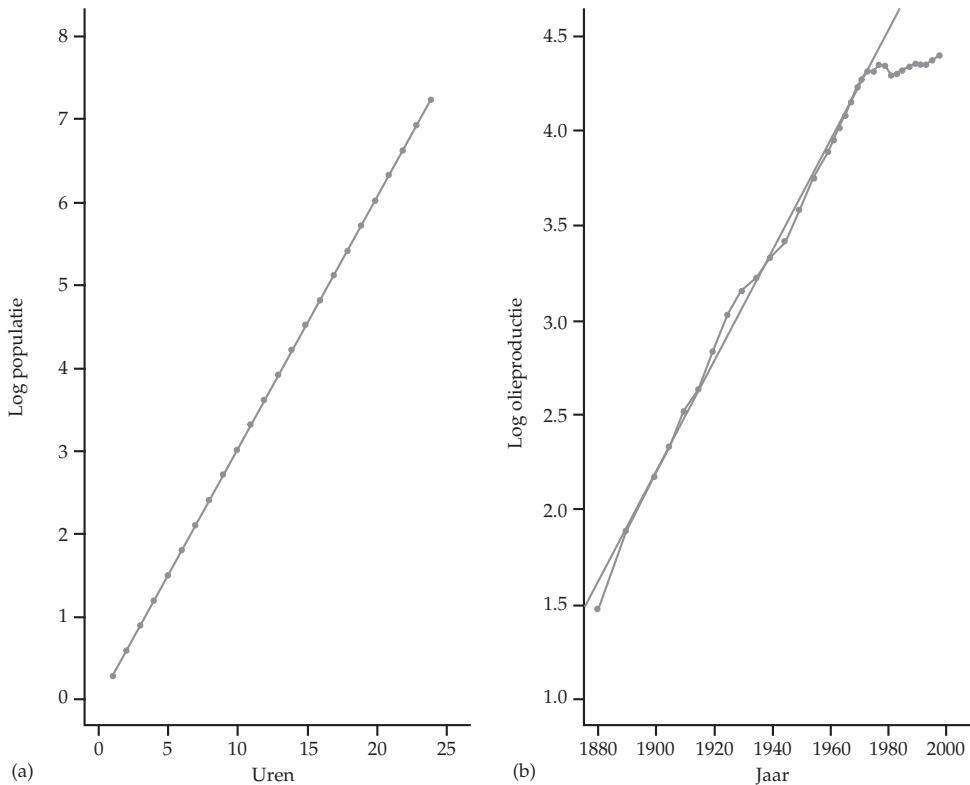
we een wiskundige transformatie toe die een exponentiële groei omzet in een lineaire groei – en een niet-exponentiële groei in iets anders dan een lineaire groei.

De benodigde transformatie wordt uitgevoerd door de *logaritme* van de gegevenspunten te nemen. Gebruik een rekenmachine met een LOG-toets om logaritmen te berekenen. Nog beter is het een statistisch pakket te gebruiken, waarmee als gevolg van een enkele opdracht de logaritmen voor een hele gegevensverzameling worden berekend. De voor ons doel essentiële eigenschap van de logaritme is dat hij een exponentiële groeikromme lineair maakt. *Als een variabele exponentieel groeit, dan groeit haar logaritme lineair.*

Voorbeeld 2.33

Figuur 2.40(a) toont de logaritmen van de tellingen van de bacteriën in figuur 2.38. Inderdaad verandert een exact exponentiële groei in een exact rechte lijn wanneer we de logaritmen in een grafiek zetten. Na 15 uur bijvoorbeeld, bevat de populatie 215 (32.768) bacteriën. De logaritme van 32.768 is 4,515. Dit punt verschijnt boven het 15-uurpunt in figuur 2.40(a).

Neem vervolgens de logaritmen van de wereldolieproductie vanaf 1880 tot en met 1998 en zet deze in een grafiek uit tegen de tijd. Figuur 2.40(b) is het resultaat. Het ziet er recht uit tot 1974! De regressielijn gebaseerd op de jaren 1880 tot en met 1972, aan de grafiek toegevoegd, beschrijft de trend op lange termijn. De toename van de olieproductie was inderdaad gedurende een groot deel van de 20e eeuw vrijwel exponentieel. Misschien is dit een waarschuwing: in de echte wereld groeit niets exponentieel gedurende een lange periode.

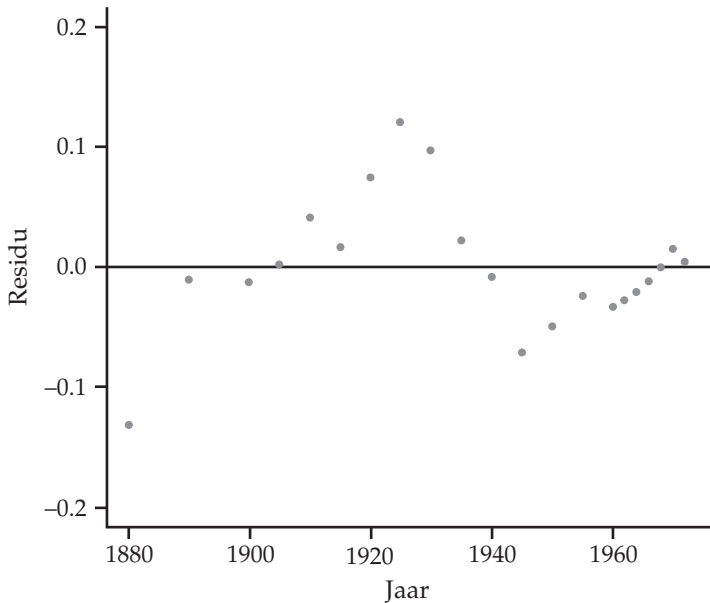


Figuur 2.40 Door logaritmen te nemen, verandert exponentiële groei in lineaire groei. (a) Exacte exponentiële groei: bacteriën verdubbelen ieder uur. (b) Olieproductie van 1880 tot en met 1998. De groei was bij benadering exponentieel tot 1973.

Figuur 2.41 toont de residuen van de logaritmen voor de jaren tussen 1880 en 1972 vanaf de regressielijn. Het residuendiagram geeft ons een gedetailleerd beeld van de olieproductie in deze jaren. De olieproductie neemt sneller toe dan de langetermijngroei in de jaren tussen 1900 en het begin van de depressie in 1929. De productie groeide niet alleen tijdens de Tweede Wereldoorlog sneller: de omslagpunten in het residuendiagram vinden in 1925 (het laatste punt voor 1929) en in 1945 (het einde van de oorlog) plaats. Alleen na de oorlog kwam de olieproductie weer boven de gemiddelde groei uit. Dit hield tot 1973 aan. De productie van olie nam natuurlijk toe gedurende de hele periode tot 1973. De grafiek van de afnemende residuen laat perioden met een tragere groei zien, niet een feitelijke neergang van de olieproductie.

2.6.5 Voorspelling in het exponentiële groeimodel

Regressie wordt vaak gebruikt voor voorspellingen. Wanneer we een kleinste-kwadratenlijn passend maken, vinden we het voorspelde antwoord \hat{y} voor elke waarde van de verklarende



Figuur 2.41 Residuen van de kleinste-kwadrate lijn van de logaritmen; olieproductie afgezet tegen jaar met als einde 1972. Het residuendiagramm vergroot afwijkingen van de kleinste-kwadrate lijn uit en helpt ons de details te onderzoeken van de geschiedenis van de olieproductie.

variabele x door onze x -waarde in de vergelijking van de lijn te vervangen. In het geval van exponentiële groei volgen de logaritmen eerder de lineaire lijn dan de feitelijke uitkomsten. Om te voorspellen, maken we de logaritmische transformatie ongedaan om terug te keren naar de oorspronkelijke meeteenheden. Hetzelfde gaat op voor een monotone transformatie. Er is altijd precies een oorspronkelijke waarde achter iedere getransformeerde waarde, zodat we altijd terug kunnen naar onze oorspronkelijke schaal.

Voorbeeld 2.34

Figuur 2.42 toont het concept voor de logaritmische transformatie. De logaritme van $x = 2$ is $\log 2 = 0,3010$. De grafiek toont dat we 'heen en weer' kunnen gaan tussen $x = 2$ en $\log x = 0,3010$. Omdat de logaritmische functie monotoon is, is $x = 2$ het enige getal dat een logaritme 0,3010 heeft. Als we dus horen dat $\log x = 0,3010$ dan komen we bij $x = 2$ uit.

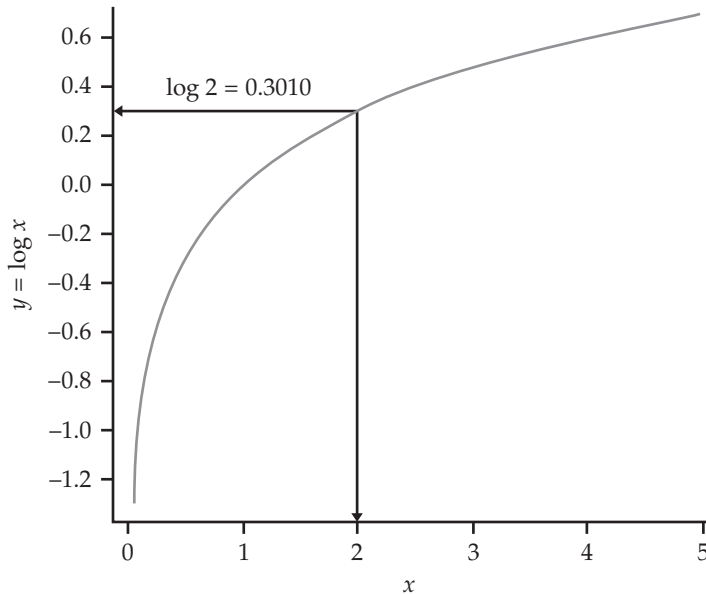
Ieder getal x kan in de vorm van een vergelijking worden verkregen uit zijn gewone (grondtal 10) logaritme $\log x$ door

$$x = 10^{\log x}$$

Als we horen dat $\log x = 0,3010$ dan

$$x = 10^{\log x} = 10^{0,3010} = 1,9999$$

Dat is $x = 2$ met een afrondingsfout omdat $\log x$ na vier cijfers werd afgerond.



Figuur 2.42 Iedere monotone functie heeft een reciproque functie die de transformatie ongedaan maakt en terugkeert naar de oorspronkelijke gegevens. Deze grafiek illustreert het inversieproces van de logaritmische transformatie.

De regressielijn voor de voorspelling van de logaritme van de olieproductie van het jaar x is

$$\log \hat{y} = -52,7 + 0,0289x$$

Deze lijn werd aangepast aan de gegevens tot en met 1972. Voor 1977 zouden we voorspellen dat

$$\log \hat{y} = -52,7 + (0,0289 \times 1977) = 4,4353$$

De voorspelde productie in originele eenheden (miljoenen vaten olie) is dan

$$\hat{y} = 10^{4,4353} = 27.246$$

De feitelijke productie in 1977 was 21.787 miljoen vaten. De voorspelling is veel te hoog omdat het exponentiële groeimodel faalt in de aanpassing van de olieproductie na 1973.

2.6.6 Modellen van machts wetten

Wanneer u een pizza bestelt, gebruikt u de diameter als maat, bijvoorbeeld 20 cm of 25 cm. Maar de hoeveelheid die u krijgt hangt af van het oppervlak van de pizza. Het oppervlak van een cirkel is π maal het kwadraat van de straal. Dus is het oppervlak van een ronde pizza met een diameter x

$$\text{oppervlak} = \pi r^2 = \pi(x/2)^2 = \pi(x^2/4) = (\pi/4)x^2$$

Dit is een **model van een machtswet** met als vorm

$$y = a \times x^p$$

Wanneer we te maken hebben met objecten met dezelfde algemene vorm – cirkels, vissen of mensen – verwachten we dat het oppervlak groter wordt met het kwadraat van een afmeting zoals diameter of lengte. Volume wordt groter met de derdemacht van een lineaire afmeting. Dat wil zeggen, meetkunde leert ons dat er in sommige gevallen machtswetten aan het werk zijn.

Biologen hebben ontdekt dat veel eigenschappen van levende wezens kunnen worden beschreven op een manier die dicht bij machtswetten ligt. Er zijn meer muizen dan olifanten en meer vliegen dan muizen – de overvloed aan soorten volgt een machtswet met lichaamsgewicht als de verklarende variabele. Dat geldt ook voor polsslage, levensduur, het aantal eieren dat een vogel legt, enzovoort. Soms kunnen de machten uit de meetkunde worden voorspeld, maar andere keren zijn ze mysterieus. Waarom gebruiken bijvoorbeeld dieren energie tot een macht die wel 3/4 van hun lichaamsgewicht bedraagt? Biologen noemen deze relatie de *wet van Kleiber*. We hebben ontdekt dat dit voor alles opgaat van bacteriën tot walvissen. We zoeken nog steeds naar een verklaring, fysiek of meetkundig, waarom het leven machtswetten volgt. Tot nu toe is er geen algemene verklaring voor, maar machtswetten zijn een goed vertrekpunt om de betrekkingen van levende dingen te vereenvoudigen.

Exponentiële groeimodellen worden lineair wanneer we de logaritmische transformatie toepassen op de te verklaren variabele y . **Modellen van machtswetten worden lineair als we de logaritmische transformatie voor beide variabelen toepassen.** Hier volgen de details:

1. Het model voor de machtswet is

$$y = a \times x^p$$

2. Pas de logaritme toe op beide kanten van de vergelijking. U ziet dan

$$\log y = \log a + p \log x$$

Dat wil zeggen, de logaritmen van beide variabelen zorgt dat het spreidingsdiagram waarbij y tegen x is afgezet, lineair is.

3. Let goed op: De *macht* p in de machtswet wordt de *helling* van een rechte lijn die $\log y$ aan $\log x$ koppelt.

2.6.7 Voorspelling bij modellen van machtswetten

Als de logaritmen van beide variabelen worden genomen om een lineair spreidingsdiagram te maken, is een machtswet een aanvaardbaar model voor de oorspronkelijke gegevens. We kunnen zelfs bij benadering schatten hoe de macht p de wet betreft bij de regressie van $\log y$

tot $\log x$ en de helling van de regressielijn als een schatting van de macht gebruiken. Bedenk wel dat de helling slechts een schatting is van p in een achterliggend machtsmodel. Hoe groter de spreiding van punten in het spreidingsdiagram rond de aangepaste lijn is, des te kleiner ons vertrouwen is dat de schatting accuraat is.

Voorbeeld 2.35

Het magische succes van de logaritmische transformatie in voorbeeld 2.29 zal bij een bioloog geen verbazing wekken. We vermoeden dat een machtswet deze relatie bepaalt.

De kleinste-kwadratenmethode voor het spreidingsdiagram in figuur 2.34 geeft de lijn

$$\log \hat{y} = 1,01 + 0,72x \log x$$

voor het voorspellen van de logaritme van hersengewicht uit de logaritme van lichaamsgewicht. Om deze logaritmische transformatie ongedaan te maken, herinnert u zich dat voor gewone logaritme met het grondtal 10, $y = 10^{\log y}$. We zien dat

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 10^{1,01+0,72 \log x} \\ &= 10^{1,01} \times 10^{0,72 \log x} \\ &= 10,2 \times (10^{\log x})^{0,72} \end{aligned}$$

Omdat $10^{\log x} = x$, is het geschatte machtsmodel dat het voorspelde hersengewicht \hat{y} met het lichaamsgewicht x voor zoogdieren verbindt

$$\hat{y} = 10,2 \times x^{0,72}$$

Op grond van voetstappen en wat andere vage aanwijzingen menen sommige mensen dat een groot aapachtig dier, Sasquatch of Bigfoot genaamd, in de Pacific Northwest leeft. Zijn gewicht wordt geschat op ongeveer 127 kilogram. Hoe zwaar zijn de hersenen van Bigfoot? Gebaseerd op de machtswet die bij schattingen van gegevens bij andere zoogdieren wordt gebruikt, voorspellen we

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 10,2 \times 127^{0,72} \\ &= 10,2 \times 32,7 \\ &= 333,7 \text{ gram} \end{aligned}$$

Ter vergelijking, gorilla's hebben een gemiddeld lichaamsgewicht van ongeveer 140 kilogram en een gemiddeld hersengewicht van ongeveer 406 gram. Natuurlijk kan Bigfoot een veel groter hersengewicht hebben dan voorspeld – immers, hij zag kans niet gevangen genomen of geschoten of op video vastgelegd te worden, en dat al heel lang niet.

Samenvatting

Niet-lineaire relaties tussen twee kwantitatieve variabelen kunnen soms worden veranderd in een lineaire relatie door een of beide variabelen te **transformeren**.

Tot de gebruikelijke transformaties behoort de familie van **machtstransformaties** t^p . De logaritme $\log t$ past in de machtsfamilie bij positie $p = 0$.

Wanneer de getransformeerde variabele alleen positieve waarden aanneemt, zijn de machtstransformaties allemaal **monotoon**. Dit betekent dat er een omgekeerde transformatie is die de oorspronkelijke gegevens uit de getransformeerde waarden terughaalt. Het effect van machtstransformaties op gegevens wordt krachtiger naarmate we ons verder van lineaire transformaties ($p = 1$) in een willekeurige richting verwijderen.

Transformatie is in het bijzonder effectief wanneer er reden is te veronderstellen dat de gegevens worden beheerst door een of ander wiskundig model. Het **exponentiële groeimodel** $y = ab^x$ wordt lineair als we de $\log y$ tegen x in een grafiek afzetten. Het model van de **machtswet** $y = ax^p$ wordt lineair als we $\log y$ tegen $\log x$ in een grafiek afzetten.

We kunnen exponentiële groei en machtsmodellen aanpassen aan gegevens door de kleinste-kwadratenlijn voor de getransformeerde gegevens te zoeken en vervolgens de omgekeerde transformatie te verrichten.

Opgaven bij paragraaf 2.6

2.118 Welke van deze transformaties nemen monotoon toe? Welke monotoon af? Welke zijn niet monotoon? Geef een vergelijking voor elke transformatie.

- U transformeert hoogten van inches in hoogten in centimeters.
- U transformeert typesnelheid van woorden per minuut in seconden nodig om een woord te typen.
- U transformeert de diameter van een munt in zijn cirkelomtrek.
- Een componiste staat erop dat haar nieuwe muziekstuk precies vijf minuten zal duren. U klokt verscheiden uitvoeringen, daarna transformeert u de tijd van minuten in het kwadraat van de fout, het kwadraat van het verschil tussen 5 minuten en de feitelijke tijd.

2.119 Stel dat t een hoek is gemeten in graden tussen 0° en 180° . In welk deel van dit bereik neemt de functie $\sin t$ monotoon toe. Welk deel neemt monotoon af?

2.120 Gordon Moore, een van de oprichters van Intel, voorspelde in 1965 dat het aantal transistors op een computerchip elke 18 maanden verdubbelt. Dit is 'de wet van Moore', een manier om de revolutie in de computertechnologie te meten. Hier volgen de gegevens en aantallen transistors voor Intel microprocessors:

Processor	Datum	Transistors	Processor	Datum	Transistors
4004	1971	2.250	486 DX	1989	1.180.000
8008	1972	2.500	Pentium	1993	3.100.000
8080	1974	5.000	Pentium II	1997	7.500.000
8086	1978	29.000	Pentium III	1999	24.000.000
286	1982	120.000	Pentium 4	2000	42.000.000
386	1985	275.000			

- Verklaar waarom de wet van Moore stelt dat het aantal transistors door de tijd exponentieel groeit.
- Maak een diagram dat geschikt is om de exponentiële groei te controleren. Laat dit zien dat het aantal transistors op een chip feitelijk exponentieel is gegroeid?

2.121 Een handboek voor het veilig omgaan met radioactieve isotopen verstrekt de volgende informatie over het verval van de isotoop jodium-125, dat gewoonlijk wordt gebruikt bij medische en biologische experimenten:

Dagen	Activiteit	Dagen	Activiteit
0	1,000	120	0,250
20	0,794	140	0,198
40	0,630	160	0,157
60	0,500	180	0,125
80	0,397	200	0,099
100	0,315	220	0,079

- Maak diagrammen om te beslissen of een lineair model, een model voor exponentiële groei of vervalmodel, of een machtsmodel het beste past bij deze gegevens.
- Gebruik regressie bij getransformeerde gegevens om ze passend te maken in uw model. Welke vergelijking gebruikt u om de radioactiviteit na x dagen te voorspellen?
- Denkt u dat het handboek rapporteert over actuele laboratoriumgegevens of over gegevens die berekend zijn in een theoretisch model? Waarom?

2.122 We keren terug naar de Wet van Moore, beschreven in opgave 2.120.

- Bepaal de kleinste-kwadratenlijn voor het voorspellen van de logaritme van het aantal transistors op een chip afgezet tegen de jaartallen. Voordat u de lijn berekent, trekt u 1971 af van alle jaren zodat 1971 het jaar 0 is, 1972 jaar 1, enzovoort.
- Veronderstel dat de Wet van Moore zeer exact is. Dat wil zeggen, dat het aantal transistors 2.250 bedraagt in het jaar 0 (1971) en daarna elke 18 maanden (1,5 jaar) verdubbelt. Beschrijf het model voor de voorspelling van transistors in het jaar x na 1971. Wat is de vergelijking van de lijn die, volgens uw model, de logaritme van transistors met x verbindt? Verklaar waarom een vergelijking van deze lijn met uw regressielijn uit (a) aantoont dat, hoewel de transistortellingen exponentieel zijn gegroeid, ze wel wat minder snel zijn gegroeid dan de Wet van Moore voorspelt.

2.123 Hier zijn de gegevens voor de vangst van 12 prooivissen in een Fins meer:

Gewicht (grams)	Lengte (cm)	Breedte (cm)	Gewicht (grams)	Lengte (cm)	Breedte (cm)
5,9	8,8	1,4	300,0	28,7	5,1
100,0	19,2	3,3	300,0	30,1	4,6
110,0	22,5	3,6	685,0	39,0	6,9
120,0	23,5	3,5	650,0	41,4	6,0
150,0	24,0	3,6	820,0	42,5	6,6
145,0	25,5	3,8	1000,0	46,6	7,6

- Maak een spreidingsdiagram van het gewicht afgezet tegen lengte. Beschrijf het patroon dat u ziet.
 - Hoe verwacht u dat het gewicht van dieren van dezelfde soort zal veranderen naarmate hun lengte toeneemt? Maak een transformatie van gewicht die het diagram lineair maakt als uw verwachting correct is. Zet de getransformeerde gewichten tegen de lengte af. Is het diagram nu bij benadering lineair?
- 2.124** Zet in een grafiek de breedte van 12 prooivissen in het vorige vraagstuk af tegen hun lengte. Wat is het patroon van de grafiek? Leg uit waarom we dit patroon verwachten.
- 2.125** (Exacte exponentiële groei) De gewone darmbacterie *E. coli* is een van de snelst groeiende bacteriën. Onder ideale omstandigheden verdubbelt het aantal *E. coli* in een kolonie zich elke 15 minuten, totdat dit proces door gebrek aan voedsel wordt gestopt. Als er in het begin één enkele bacterie is, hoeveel zijn er dan na 1 uur? En na 5 uur?
- 2.126** (Exacte exponentiële groei) In een artikel in een schoolkrant werd eens gesteld (we verzinnen het niet) 'Vanaf 1950 is het aantal neergeschoten Amerikaanse kinderen elk jaar verdubbeld'.⁴⁰ Om te zien dat dit onnozel is, veronderstelt u dat in 1950 slechts 1 kind 'was neergeschoten' en dat de uitspraak in het artikel correct is.
- Maak een tabel van het aantal kinderen dat in elk van de volgende 10 jaren is gedood, van 1951 tot en met 1960.
 - Zet het aantal doden af tegen het jaar en verbindt de punten met een gladde kromme. Dit is een exponentiële kromme.
 - Het artikel verscheen in 1995, 45 jaar na 1950. Hoeveel kinderen werden er in 1995 gedood, volgens het artikel?
 - Neem de logaritmen van elk van uw tellingen uit (a). Zet deze logaritmen af tegen het jaar. U moet een rechte lijn krijgen.
 - Uit uw diagram in (d) bepaalt u de waarschijnlijke waarden van de helling b en de intercept a voor de lijn. Gebruik de vergelijking $y = a + bx$ om de logaritme van de telling over 45 jaar te voorspellen. Controleer uw resultaat met behulp van de logaritme van de telling die u in (c) vond.

2.127 (Exacte exponentiële groei) Alice krijgt bij haar geboorte een spaarbrief. Die is aanvankelijk €500 waard, en het rentepercentage is 7.5% per jaar. Dat betekent dat de waarde elk jaar wordt vermenigvuldigd met 1.075.

- Bepaal de waarde na 1 jaar, na 2 jaar enzovoort tot 10 jaar.
- Zet de waarde y uit tegen het aantal jaren x (op grafiekenpapier). Verbind de punten door een gladde kromme. Dit is een exponentiële kromme.
- Neem de logaritme van elke door u onder (a) gevonden waarde. Zet de logaritme $\log y$ uit tegen x . U moet dan een rechte lijn krijgen.

2.128 Fred en Alice zijn in hetzelfde jaar geboren, en ieder begon zijn leven met een kapitaal van 500 euro. Fred voegde elk jaar 100 euro toe, maar ontving geen rente. Alice voegde niets toe, maar kreeg jaarlijks 7.5% rente. Na 25 jaar gaan Alice en Fred met elkaar trouwen. Wie heeft het meeste geld?

2.129 De volgende tabel geeft het aantal inwoners van de VS van 1790 tot 1990, in miljoenen personen.

Jaar	Populatie	Jaar	Populatie	Jaar	Populatie
1790	3,9	1860	31,4	1930	122,8
1800	5,3	1870	39,8	1940	131,7
1810	7,2	1880	50,2	1950	151,3
1820	9,6	1890	62,9	1960	179,3
1830	12,9	1900	76,0	1970	203,3
1840	17,1	1910	92,0	1980	226,5
1850	23,2	1920	105,7	1990	248,7

- Zet de populatie uit tegen de tijd. De groei van de Amerikaanse bevolking lijkt ruwweg exponentieel te zijn.
- Zet de logaritmen van de populatie-aantallen uit tegen de tijd. Het groeipatroon is nu duidelijk. Een deskundige zegt: 'De bevolking van de VS groeide exponentieel van 1790 tot ongeveer 1880. Na 1880 was de groei nog steeds exponentieel, maar in een langzamer tempo.' Verklaar hoe deze beschrijving wordt verkregen uit het diagram.
- Leg een doorzichtige liniaal over de grafiek van de logaritmen van de populaties, van 1900 tot 1990. Gebruik die lijn om de bevolking van de VS in het jaar 2000 te voorspellen. Is de populatie sinds 1990 sneller of langzamer gegroeid dan de lange-termijn trend?

2.130 Groeien schimmelkolonies exponentieel? In een onderzoek naar de groei van schimmels worden flessen met een groeimiddel voorzien van gelijke hoeveelheden sporen van de schimmel *Aspergillus nidulans*. De grootte van een kolonie wordt gemeten door te analyseren hoeveel er overblijft van een radioactieve substantie die tijdens de groei

door de schimmel wordt geconsumeerd. Voor elke meting van de grootte moet de kolonie worden vernietigd, zodat de onderstaande data slaan op 30 afzonderlijke kolonies. Om het patroon glad te strijken, berekenen we telkens de gemiddelde grootte van de drie kolonies die op een bepaald tijdstip worden gemeten. (Soortgelijke experimenten worden beschreven door A.P.J. Trinci, 'A kinetic study of the growth of *Aspergillus nidulans* and other fungi', *Journal of General Microbiology*, 57 (1969), blz. 11–24. De gegevens werden verstrekt door Thomas Kuczek, Department of Statistics, Purdue University.)

Uren	Grootte van de kolonie			Gemiddelde
0	1,25	1,60	0,85	1,23
3	1,18	1,05	1,32	1,18
6	0,80	1,01	1,02	0,94
9	1,28	1,46	2,37	1,70
12	2,12	2,09	2,17	2,13
15	4,18	3,94	3,85	3,99
18	9,95	7,42	9,68	9,02
21	16,36	13,66	12,78	14,27
24	25,01	36,82	39,83	33,89
36	138,34	116,84	111,60	122,26

- Zet de gemiddelde koloniegrootte uit tegen de tijd. Zet daarna de logaritme van de gemiddelde koloniegrootte uit tegen de tijd.
- Op basis van dergelijke gegevens verdelen de microbiologen de groei van schimmelkolonies in drie elkaar in de tijd opvolgende fasen. Exponentiële groei heeft slechts tijdens één van die fasen plaats. Beschrijf in het kort de drie fasen, daarbij specifiek verwijzend naar uw diagrammen om de beschrijving te onderbouwen.
- De fase van exponentiële groei voor deze gegevens duurt van ongeveer 6 tot ongeveer 24 uren. Bepaal de kleinste-kwadraten regressielijn, slechts aangepast voor de data van 6 tot 24 uren. Gebruik deze lijn om de grootte van de kolonie te voorspellen als sinds de aanvang 10 uren zijn verstreken. (Merk op dat de lijn de logaritme voorspelt; de grootte moet dus uit de logaritme worden bepaald.)

2.131 Het is gemakkelijk om 'de diameter op borsthoogte' van een boom te meten. Het is lastig om de 'bovengrondse biomassa' van een boom te meten. U moet de boom omhakken en hem wegen. De biomassa is belangrijk in ecologische onderzoeken, dus schatten ecologen deze biomassa en gebruiken een machtswet. Door gegevens te combineren van 378 bomen in tropische regenwouden krijgt u deze relatie tussen biomassa y gemeten in kilo's en de diameter x gemeten in centimeters:

$$\log_e y = -2,00 + 2,42 \log_e x$$

Merk op dat de onderzoekers ervoor kozen om *natuurlijke logaritmen* te gebruiken met grondtal $e = 2,71828$ in plaats van de gewone logaritme met grondtal 10.

- Vertaal de gegeven lijn in een machtsmodel. Gebruik het feit dat voor natuurlijke logaritmen

$$y = e^{\log_e y}$$

- Schat de biomassa van een tropische boom met een diameter van 30 centimeter.

2.132 Bepaal de correlatie tussen de logaritme van de gemiddelde grootte en de tijd voor de data tussen 6 en 24 uren. Teken daarna een spreidingsdiagram van de logaritmen van de afzonderlijke metingen van de grootte uitgezet tegen de tijd voor dezelfde periode en bepaal de correlatie. Waarom verwachten we dat de tweede r kleiner is? Is dat ook het geval?

2.133 Tabel 2.11 geeft het gemiddelde gewicht en de gemiddelde levensduur in gevangenschap voor verscheidene soorten zoogdieren. Sommige auteurs van machtswetten in de biologie beweren dat levensduur afhangt van lichaamsgewicht volgens een machtswet met macht $p = 0,2$. Maak een machtswet die past bij deze gegevens (gebruik logaritmen). Volgt deze kleine gegevensverzameling een machtswet met een macht die dicht bij 0,2 ligt? Gebruik uw aangepaste model om de gemiddelde levensduur voor mensen (gemiddeld gewicht 65 kg) te voorspellen. Mensen vormen een uitzondering op de regel.

2.134 Grotere mensen zijn over het algemeen sterker dan kleinere mensen, hoewel er bij individuen veel variatie bestaat. Laten we een theoretisch model maken. Lichaamsgewicht neemt toe als de derdemacht van de lengte. De spierkracht neemt toe met zijn middellijn, we nemen aan dat die groter wordt met het kwadraat van de lengte. Neem deze samen: welke machtswet beschrijft hoe spierkracht toeneemt met gewicht?

2.135 Laten we uw resultaat eens toepassen op het vorige vraagstuk. Zet de relatie van de machtswet tussen kracht en lichaamsgewicht af in een grafiek voor gewicht (ongeveer) van 1 tot 1000. (Constanten in de machtswet weerspiegelen de gebruikte meeteenheden, dus kunnen we ze negeren.) Gebruik de grafiek om te verklaren waarom een persoon die 1 miljoen keer zo zwaar als een mier is, toch niet 1 miljoen keer zoveel als een mier kan tillen.

2.136 Fysiologen beweren dat de hartslag in ruste van mensen gerelateerd is aan ons lichaamsgewicht via een machtswet. De gemiddelde hartslag y (slagen per minuut) wordt bepaald uit lichaamsgewicht x (kg) door

$$y = 241 \times x^{-1/4}$$

Laten we proberen dit te verklaren. De wet van Kleiber zegt dat het energieverbruik van dieren, mensen inbegrepen, toeneemt met de $3/4$ macht van het lichaamsgewicht. Maar het gewicht van hart en longen van mensen en het bloedvolume in het lichaam

Soorten	Gewicht (kg)	Levensduur (jaren)
Baviaan	32	20
Bever	25	5
Huiskat	2,5	12
Chimpansee	45	20
Hond	8,5	12
Olifant	2800	35
Geit	30	8
Gorilla	140	20
Grizzlybeer	250	25
Cavia	1	4
Nijlpaard	1400	41
Paard	480	20
Leeuw	180	15
Muis, gewone	0,024	3
Varken	190	10
Vos	6	7
Schaap	30	12

Tabel 2.11 Lichaamsgewicht en levensduur voor verscheidene soorten zoogdieren

hangen direct samen met het lichaamsgewicht. Gegeven deze feiten moet u niet verrast zijn dat de hartslag evenredig is aan de $-1/4$ macht van het lichaamsgewicht. Waarom niet?

2.137 Galileo bestudeerde de beweging van kogels die van een helling rollen. Newton liet later zien hoe de gegevens van Galileo pasten in zijn algemene bewegingswetten. Stel u voor dat u Galileo bent zonder de houvast van de wetten van Newton. Hij rolde een kogel van een helling af op verschillende afstanden en mat de horizontale afstand die de kogel aflegde voordat deze de bodem raakte. Hier volgen de gegevens van Galileo toen hij een horizontale plank aan het eind van de helling plaatste voor een horizontale beweging van de kogel als hij begint te vallen. (We willen niet de ongebruikelijke, 17e eeuwse maten noemen die Galileo gebruikte om de afstand te meten.)

Afstand	Hoogte
1500	1000
1340	828
1328	800
1172	600
800	300

Zet in een grafiek de afstand y af tegen de hoogte x . Het patroon is erg regelmatig zoals het betaamt bij gegevens die aan een natuurwet beantwoorden. We willen de afstand

Boomsort	Aantal zaden	Gewicht zaden (mg)	Boomsort	Aantal zaden	Gewicht zaden (mg)
Papierberk	27.239	0,6	Amerikaanse beuk	463	247
Gele berk	12.158	1,6	Amerikaanse beuk	1.892	247
Witte spar	7.202	2,0	Am. eik (<i>Quercus valentina</i>)	93	1.851
Engelmannspar	3.671	3,3	Am. eik (<i>Quercus coccinea</i>)	525	1.930
Zwarte spar	5.051	3,4	Am. eik (<i>Quercus rubra</i>)	411	2.475
Tulpenboom	13.509	9,1	Am. eik (<i>Quercus rubra</i>)	253	2.475
Gele den	2.667	37,7	Hickory	40	3.423
Californische den	5.196	40,0	Amerikaanse witte eik	184	3.669
Suikeredoorn	1.751	48,0	Schijneik	107	4.535
Suikerpijn	1.159	216,0			

Tabel 2.12 Tellingen en gewichten voor zaden van in de VS algemeen voorkomende boomsoorten

als een functie van de hoogte beschouwen. Dat wil zeggen, we willen x transformeren om de grafiek lineair te maken.

- Bedenk voordat u rekent: zijn de machten x^p voor $p < 1$ of $p > 1$ in staat om de grafiek te rechte. Waarom?
- Loop de ladder van transformaties in de door u gekozen richting totdat de grafiek bijna lineair is. Welke transformatie stelt u voor?

2.138 Tabel 2.12 verschaft gegevens over het gemiddelde aantal zaden dat door verscheidene boomsoorten in een jaar wordt geproduceerd en het gemiddelde gewicht (in milligrammen). (Sommige soorten staan er twee keer op, omdat hun zaden op twee locaties zijn geteld.) We zouden misschien verwachten dat bomen met zware zaden minder produceren, maar wat is vorm van de relatie?

- Maak een spreidingsdiagram die laat zien hoe het gewicht van de boomzaden verklaart hoeveel zaden de boom produceert. Beschrijf vorm, richting en de sterkte van de relatie.
- Als een machtswet op deze relatie van toepassing is, vertonen de logaritmen van de oorspronkelijke gegevens een lineair patroon. Gebruik uw rekenmachine of software voor de logaritmen van zowel het gewicht van de zaden als de getallen in tabel 2.12. Maak een nieuw spreidingsdiagram waarin u deze nieuwe variabelen gebruikt. Wat is nu de vorm, richting en de sterkte van de relatie?

2.139 Lang geleden beweerde Thomas Malthus (1766-1834) dat de bevolking exponentieel groeide terwijl de voedselvoorraden slechts lineair toenamen. Gevolg: hongersnood leidt tot teruggang in bevolkingsaantal. In tabel 2.13 staan de gegevens over de wereldbevolking volgens de schatting van het Amerikaanse Census Bureau. Analyseer zorgvuldig, gebruik daarbij ons onderzoek naar de wereldwijde aardolieproductie als model en schrijf een korte verhandeling over het patroon van de bevolkingstoename

Jaar	Bevolking	Jaar	Bevolking	Jaar	Bevolking
1950	2,555	1968	3,558	1986	4,938
1952	2,635	1970	3,708	1988	5,110
1954	2,728	1972	3,862	1990	5,284
1956	2,833	1974	4,015	1992	5,450
1958	2,945	1976	4,160	1994	5,611
1960	3,039	1978	4,305	1996	5,769
1962	3,136	1980	4,457	1998	5,925
1964	3,277	1982	4,613	2000	6,080
1966	3,416	1984	4,774	2002	6,234

Tabel 2.13 Wereldbevolking, miljarden, halverwege het jaar

sinds 1950. Is de bevolking sinds 1950 exponentieel gegroeid? Verloopt de bevolkings-groei in de afgelopen jaren trager?

2.140 Stel oceaangebacteriën 1 tot 15 minuten lang aan röntgenstralen bloot. Hier volgen de aantallen overlevende bacteriën (in honderdtallen) op een kweekbodem na elke periode:

Tijd t	Telling y	Tijd t	Telling y
1	355	9	56
2	211	10	38
3	197	11	36
4	166	12	32
5	142	13	21
6	106	14	19
7	104	15	15
8	60		

De theorie voorspelt een exponentiële groei of een vervalmodel. Lijken de gegevens deze theorie te bevestigen?

2.141 Het elektronisch betalingsverkeer (EFT) is in de VS zeer sterk toegenomen. Hier volgen de gegevens van het aantal transacties (in miljoenen):

Jaar	EFT	Jaar	EFT	Jaar	EFT
1985	3,579	1991	6,642	1996	11,780
1987	4,108	1992	7,537	1997	12,580
1988	4,581	1993	8,135	1998	13,160
1989	5,274	1994	9,078	1999	13,316
1990	5,942	1995	10,464		

Maak een duidelijk verslag van het patroon van de groei van elektronische transacties in het verloop van de tijd. Gebruik daarbij zo nodig diagrammen en berekeningen. Is het patroon in de laatste jaren veranderd?

4.5 Meer wetten van grote aantallen (aanvulling)

4.5.1 Beslissingsanalyse

Misschien wel de meest rechtlijnige visie op statistische deductie betreft het doel van de gevolgtrekkingen bij *het nemen van beslissingen in de aanwezigheid van onzekerheden*. Aangezien onzekerheid kan worden beschreven door kans is het gebruik van kansen bij de deductie essentieel. We zullen de natuur van deductie illustreren aan de hand van een aantal voorbeelden.

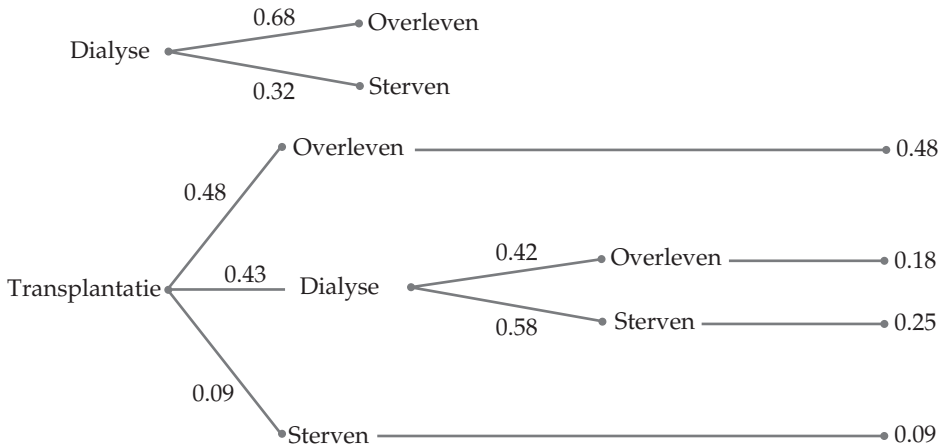
4.5.2 Beslissingen gebaseerd op kansen

Een mogelijk doel van beslissen met onzekerheden is het zo groot mogelijk maken van de kans op een gewenste uitkomst. Hier volgt een voorbeeld van zo'n probleem.

Voorbeeld 4.39

De nieren van een patiënt met een nierziekte zijn zwaar beschadigd. Wil de patiënt het overleven dan is er de keus tussen een niertransplantatie of regelmatig dialyseren (enkele keren per week aan de kunstnier). Lonneke staat voor deze keus. Beide behandelingen zijn riskant. Haar dokter geeft haar de volgende informatie over patiënten in haar toestand: ongeveer 68% van de dialysepatiënten overleeft vijf jaar. Van de getransplanteerde patiënten overleeft ongeveer 48% een getransplanteerde nier vijf jaar; 43% moet toch weer regelmatig dialyseren omdat de kunstnier niet functioneert; en de resterende 9% overleeft de transplantatie niet. Van de patiënten die toch weer moeten dialyseren overleeft 42% de eerste vijf jaar. Lonneke wil haar levenskansen zo groot mogelijk houden. Welke behandeling moet ze kiezen?⁵

We kunnen de informatie die door de dokter gegeven wordt in een *boomdiagram* met alle mogelijke uitkomsten neerzetten zoals in figuur 4.21 gedaan is. Elk pad door de boom representeert een mogelijke uitkomst van Lonnekes geval. De kans die bij elke tak is geschreven na de eerste fase is de *voorwaardelijke* kans op de volgende stap gegeven het feit dat Lonneke dit punt bereikt heeft. Er is een kans van 0,68 dat de dialysepatiënt de volgende vijf jaar overleeft. De voorwaardelijke kans dat een patiënt de komende vijf jaar overleeft, gegeven het feit dat de patiënt eerst een transplantatie heeft gehad en toen toch weer moest dialyseren omdat de transplantatie niet functioneerde, is niet dezelfde. Deze kans is 0,42 en verschijnt bij een andere tak in het boomdiagram. Bestudeer het boomdiagram om uzelf ervan te overtuigen dat alle beschikbare informatie er inderdaad in terug te vinden is.



Figuur 4.21 Boomdiagram voor het nierziekte-beslissingsprobleem in voorbeeld 4.39

De productregel voor kansen stelt dat *de kans om het eind van een tak te bereiken het product is van alle stappen op die tak*. Deze kansen zijn aan het eind van elke tak geschreven in figuur 4.21. Bijvoorbeeld de gebeurtenis dat een getransplanteerde nierpatiënt toch weer moet gaan dialyseren en dan vijf jaar blijft leven is

$$A = \{D \text{ en } S\}$$

Waarbij

$D = \{ \text{getransplanteerde patiënt moet toch weer gaan spoelen} \}$

$S = \{ \text{patiënt blijft vijf jaar leven} \}$

Daarom geldt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(D \text{ en } S) \\ &= P(S | D)P(D) \\ &= (0,42)(0,43) = 0,18 \end{aligned}$$

Lonneke kan nu haar kansen om met dialyse nog vijf jaar te blijven leven vergelijken met de kans om met een transplantatie nog vijf jaar te leven. Voor dialyse is de kans 0,68. Een getransplanteerde patiënt kan blijven leven met een functionerende donornier, of overleven met een niet functionerende donornier door weer te gaan dialyseren. Dit zijn *disjuncte* gebeurtenissen die worden gerepresenteerd door verschillende takken in het boomdiagram. Zij hebben de respectievelijke kansen van 0,48 en 0,18. De optelregel voor kansen stelt dat de totale kans om de komende vijf jaar te blijven leven de som is, $0,48 + 0,18 = 0,66$. Dit is iets minder dan de overlevingskans bij dialyse, dus dialyse is toch een betere keus.

De medische beslissingsanalyse voor voorbeeld 4.39 illustreert een beslissingsprobleem waarvan het doel is de kans van de uitkomst zo groot mogelijk te laten zijn. De beslissingsboom organiseert de verschillende paden die naar de uiteindelijke uitkomst kunnen leiden, en maakt de berekening van de kansen die hieruit voortkomen eenvoudig als alle getallen op hun plek staan. We kunnen dan de kansen van de gewenste uitkomst bij elk van de beslissingen vergelijken. Andere beslissingsproblemen kunnen meer alternatieven hebben.

Waar komen de voorwaardelijke kansen in voorbeeld 4.39 toch vandaan? Ze zijn deels gebaseerd op data afkomstig uit onderzoeken op zeer veel nierpatiënten. Maar de overlevingskans van één persoon hangt af van haar leeftijd, haar algemene gezondheid en andere factoren. Lonnekes dokter nam haar persoonlijke situatie in ogenschouw alvorens haar deze kansen te geven. Het is kenmerkend voor de meeste beslissingsanalyse-problemen dat *persoonlijke kansen* worden gebruikt om de onzekerheid te laten beschrijven door een geïnformeerde beslissingsmaker.

4.5.3 Beslissingen gebaseerd op verwachte utiliteit

Bij nader inzien realiseert Lonneke zich dat de pure overlevingskans geen goede basis is voor haar beslissing. De kwaliteit van leven die een succesvolle transplantatie haar kan geven moet ook meegenomen worden. andere factoren zoals kosten zijn ook belangrijk. Veronderstel dat Lonneke het totale voordeel van elke uitkomst als een getal kan weergeven. Het overleven van de volgende vijf jaar bij dialyse is 50 punten en de komende vijf jaar overleven met een transplantatie is 80 punten. Deze getallen heten *utiliteiten*. Aangezien de uitkomst onzeker is moet Lonneke een beslissing nemen die een *verwachting* is van een zo groot mogelijke utiliteit. Dit is een tweede – en een belangrijker type – beslissingsanalyse.

Het is lastig een getalsmatige utiliteit toe te wijzen aan de voordelen van een medische uitkomst. Dit komt omdat er veel factoren in het spel zijn en de meeste hebben geen voor de hand liggende numerieke weergave. In sommige situaties echter kunnen de voordelen van de uitkomst gemeten worden in euro's, een getal dat iedereen begrijpt. Beslissingsanalyse die gebaseerd is op het opbrengen van zoveel mogelijk euro's wordt veel gebruikt bij het maken van zakelijke plannen.

Voorbeeld 4.40

Zipdrive B.V. heeft een nieuwe diskdrive ontwikkeld voor kleine computers. De vraag naar een nieuw product is onzeker, maar kan beschreven worden als 'groot' of 'klein' in een willekeurig jaar. Het product zal naar verwachting overbodig worden na vier jaar. Het management moet beslissen of er een fabriek gebouwd moet worden of dat een fabriek in Hongkong ingehuurd moet worden om de nieuwe diskdrive te fabriceren. Een fabriek bouwen is zeer voordelig als de vraag hoog is, maar betekent een verlies als de vraag de komende jaren afneemt.

Na een zorgvuldige studie van de markt en alle relevante kosten levert Zipdrive's planbureau de volgende informatie. Er zijn drie mogelijke situaties,

S_1 = eerste jaar grote vraag, volgende drie jaar grote vraag

S_2 = eerste jaar grote vraag, volgende drie jaar kleine vraag

S_3 = eerste jaar kleine vraag, volgende drie jaar kleine vraag

De beste schatting van de kansen van deze gevallen is

Situatie	S_1	S_2	S_3
Kans	0,5	0,4	0,1

De totale opbrengst van deze vierjarige periode hangt uiteindelijk af van de beslissing die genomen wordt en de vraag naar het product. De winst (in miljoenen euro's) in elk van de gevallen kan als volgt voorspeld worden

Beslissing	S_1	S_2	S_3
Bouwen	56	10	-20
Uitbesteden	30	20	10

Welke beslissing is het meest veelbelovend?

We kunnen gemakkelijk een boomdiagram tekenen voor dit beslissingsprobleem, maar omdat de uitkomst slechts één enkele fase omvat (een van de drie situaties), helpt een boomdiagram hier niet zoals in voorbeeld 4.39. We berekenen de gemiddelde winst voor beide beslissingen. Een nieuwe fabriek brengt op:

$$\mu = (56)(0,5) + (10)(0,4) + (-20)(0,1) = \Delta 30 \text{ miljoen}$$

Uitbesteden aan Hongkong brengt op:

$$\mu = (30)(0,5) + (20)(0,4) + (10)(0,1) = \Delta 24 \text{ miljoen}$$

Een nieuwe fabriek levert, gemiddeld over de onzekere toekomst, meer op.

De kansen voor de verschillende niveaus van de vraag zijn wederom persoonlijke kansen die de beslissingen van ervaren managers weergeven. Vaak is de manager die het product ontwikkeld heeft optimistischer dan de manager die het product moet verkopen. In dat geval kan Zipdrive de verwachte opbrengst twee maal berekenen door gebruik te maken van de door de beide managers gegeven kansen. Dit heet een gevoeligheidsanalyse omdat het ons laat zien of de aanbevolen beslissing wijzigt als we de kansen wijzigen. In de praktijk, waar beslissingsproblemen veel ingewikkelder zijn dan in onze voorbeelden, is de belangrijkste waarde van een beslissingsanalyse dat deze duidelijk maakt onder welke omstandigheden een bepaalde keuze de beste is.

Uiteindelijk is de directeur van Zipdrive toch bezorgd over de mogelijkheid om €20 miljoen te verliezen wanneer de vraag laag blijkt. Daarom besluit hij de fabriek in Hongkong in te huren alhoewel dat een lagere opbrengst betekent. De utiliteit van een keuze is voor de directeur niet gelijk aan de opbrengst in euro's omdat hij niet graag zulke risico's neemt. Zelfs in een zakelijk beslissingsprobleem is het meten van de utiliteit lastig.

Opgaven bij supplement paragraaf 4.5

4.129 John heeft een kransslagadervernauwing. Hij en zijn dokter moeten kiezen tussen een behandeling met medicijnen en een bypassoperatie. John maakt zich zorgen over de kwaliteit van zijn verdere leven, maar ook over de lengte van zijn leven. Hij wil de kans maximaliseren dat hij de komende vijf jaar overleeft en ondertussen ook nog een

redelijk actief leven leiden. Noem dit gebeurtenis A . Voor patiënten van Johns leeftijd en toestand schat de dokter door behandeling met medicijnen de kans $P(A) = 0,7$. In het geval van een bypassoperatie is de situatie als volgt,

- Er is een kans van 0,05 dat hij het niet overleeft, een kans van 0,10 dat hij het wel overleeft maar met ernstige complicaties en een kans van 0,85 dat hij de operatie zonder ernstige complicaties overleeft.
- Als hij de operatie overleeft mét complicaties dan is de conditionele kans op A gelijk aan 0,73. Als hij het overleeft zonder complicaties dan is de kans op A gelijk aan 0,76.

Geef $P(A)$ als John geopereerd is en vergelijk dit met $P(A) = 0,7$ voor een behandeling met medicijnen. Wat moet John doen?

- 4.130** Een fabrikant van sneeuwscooters vraagt zich af of de komende winter een strenge, een normale of een zachte gaat worden. Weerstatistieken geven aan dat de kans op een normale winter 0,5 is en dat een zachte of strenge winter ieder een kans van 0,25 hebben. De fabrikant weet welk productieschema het beste is voor elk type winter, en hij kan de opbrengst voorspellen van elk schema voor alle drie soorten winters. Natuurlijk zal de winst kleiner zijn als het productieschema niet overeenstemt met de soort winter. Hij voorspelt zijn opbrengsten als volgt in eenheden van €100.000:

Beslissing	Winter		
	Streng	Normaal	zacht
Schema voor strenge winter	120	50	-10
Schema voor normale winter	100	100	50
Schema voor zachte winter	80	80	80

Geef de verwachte opbrengst voor elk productieschema. Welke keus geeft de hoogste verwachte opbrengst.

- 4.131** De fabrikant van sneeuwscooters uit de vorige oefening besluit niet de lange termijnkansen voor de drie soorten winters te gebruiken. In plaats daarvan vertrouwt hij op de weersvoorspelling die een kans van 0,75 geeft dat deze winter een strenge zal worden, 0,20 dat de winter normaal zal worden, en 0,05 dat het een zachte winter gaat worden. Welk productieschema moet hij nu kiezen om zijn verwachte opbrengst zo hoog mogelijk te houden?
- 4.132** Een servicemonteur krijgt een vast bedrag van 5 om een kapotte radarontvanger te repareren. Hij weet dat het probleem in de microgolfversterker zit of in de voeding. De kosten om de versterker te onderzoeken zijn 3, en zijn kosten om de voeding te onderzoeken zijn 1. Hij moet beslissen wat hij het eerst onderzoekt – als hij fout gokt dan moet hij de andere component ook onderzoeken.

- Vul de opbrengst van de reparateur in voor elke situatie:

Beslissing	Plaats waar het probleem zich bevindt	
	Versterker	Voeding
Versterkereerst		
Voeding eerst		

- Uit jarenlange ervaring weet de man dat 80% van problemen als deze het gevolg zijn van een defect aan de versterker. Welke component moet hij eerst onderzoeken?

4.133 De eigenaar van een Chinees restaurant overweegt om de pekingeenden, die elke dag een bepaalde voorbereiding vergen, vooraf te bereiden om ook klanten te kunnen bedienen die dit niet vooraf hebben besteld. Hier volgen de op ervaring gebaseerde persoonlijke kansen voor het aantal verzoeken per dag voor pekingeend zonder reservering:

Verzoeken	0	1	2	3	4
Kans	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1

Als hij een eend verkoopt is de winst €10. Elke voorbereide eend die niet besteld wordt kost hem €5. De restauranteigenaar kan beslissen om 0, 1, 2, 3 of 4 eenden vooraf te bereiden. Welke beslissing geeft de hoogste verwachte opbrengst?

4.134 Hier wordt een vereenvoudigde versie gegeven van een van de eerste toepassingen van beslissingsanalyse in de antropologie. De kapiteins van viskano's in Jamaica zetten hun visfuiken uit om ze later te legen en weer terug te zetten. Er zijn twee visgebieden, de binnen- en de buitenoevers. De buitenoevers leveren meer en betere vis, maar 25% van de tijd zijn daar sterke stromingen die de fuiken kunnen vernielen. De binnenoevers geven minder vis, maar kennen deze stromingen niet. De antropologen zagen dat veel kapiteins één derde van hun fuiken op de binnenoevers plaatsten en twee derde op de buitenoevers. Na zorgvuldig onderzoek ontdekten de antropologen dat het maandinkomen voor een kapitein (in Engels ponden) als volgt is:

Beslissing	Stroming	Geen stroming
Alle fuiken op de binnenoevers	17,3	11,5
Eén derde van de fuiken op de binnenoevers	5,2	17,0
Alle fuiken op de buitenoevers	-4,4	20,6

Welke locatie voor zijn fuiken moet een kanokapitein kiezen?

3.5 Gegevensbestanden en ethiek

De productie en het gebruik van gegevens roepen, net als andere menselijke inspanningen, ethische vragen op. We hebben het niet over de telefonische verkoper die zijn belpraatje begint met 'ik voer een onderzoek uit.' Dergelijke misleiding is duidelijk onethisch. Die brengt

legitieme onderzoeksinstituten tot razernij, want zij merken dat het publiek steeds minder bereid is hen te woord te staan. We zullen het ook niet hebben over enkele onderzoekers die in hun jacht op promotie valse gegevens publiceren. Hier is geen sprake van een ethische kwestie – het vervalsen van gegevens om carrière te maken is gewoon verkeerd. Bij ontdekking betekent dit het einde van de carrière. Maar hoe eerlijk moeten onderzoekers zijn over echte, niet vervalste gegevens? Hier volgt een voorbeeld dat als antwoord oppert: ‘Eerlijker dan ze vaak zijn.’

Voorbeeld 3.28

Artikelen over wetenschappelijk onderzoek worden verondersteld beknopt te zijn en zonder overbodige details. Beknoptheid stelt onderzoekers in de gelegenheid om niet volledig open over hun gegevens te zijn. Selecteerden zij hun proefpersonen op een vooringenomen manier? Verstrekten zij de gegevens van slechts enkele van hun proefpersonen? Hebben zij verscheidene statistische analyses uitgevoerd en slechts verslag gedaan van die analyses die hun het meest aanspraken? De statisticus John Bailar lichtte meer dan 4000 medische artikelen door in de ruim tien jaar die hij als expert bij het *New England Journal of Medicine* werkzaam was. Hij verklaart dat ‘bij een review van statistische aspecten het vaak duidelijk was dat er kritische informatie ontbrak. De hiaten hadden bijna altijd het praktische gevolg dat de conclusies van de auteur sterker leken dan ze zouden moeten zijn.’⁶ De situatie is ongetwijfeld erger op gebieden waarop het gepubliceerde werk minder zorgvuldig wordt doorgelicht.

De ingewikkeldste ethische kwesties doen zich voor wanneer we gegevens van mensen verzamelen. De ethische problemen zijn ernstiger bij experimenten die een behandeling aan mensen opleggen dan bij steekproefonderzoeken die gewoonweg informatie verzamelen. Het testen van nieuwe medische behandelingen bijvoorbeeld kan proefpersonen zowel schade berokkenen als goed voor hen uitpakken. Hier volgen enkele ethische basisnormen waaraan gevolg moet worden gegeven bij elk onderzoek, steekproef of experiment, waarin gegevens van proefpersonen worden verzameld.

BASISNORMEN VOOR GEGEVENSBESTANDEN

De organisatie die het onderzoek uitvoert moet een **institutionele raad van toezicht** hebben die alle voorgenomen onderzoeken tevoren doorlicht om de proefpersonen tegen mogelijke schade te beschermen.

Alle personen die als proefpersoon in een onderzoek fungeren, moeten hun **informed consent** (op voorafgaande informatie gebaseerde toestemming) verlenen voordat de gegevens worden verzameld.

Alle persoonlijke gegevens moeten **vertrouwelijk** worden gehouden. Alleen statistische samenvattingen van groepen proefpersonen mogen openbaar worden gemaakt.

De Amerikaanse wet vereist dat onderzoeken die door de federale overheid worden gefinancierd, aan deze principes voldoen. Maar de wet noch de consensus van experts is volledig duidelijk over de details van hun toepassing.

3.5.1 Institutionele raden van toezicht

Het doel van een institutionele raad van toezicht is niet om te beslissen of een voorgesteld onderzoek waardevolle informatie zal opleveren of statistisch goed is opgezet. De raad heeft als doel, zoals bij een van de universiteitsraden is verwoord, ‘rechten en welbevinden van proefpersonen (waaronder patiënten) die betrokken worden bij onderzoeksactiviteiten, te beschermen.’ De raad licht het plan voor het onderzoek door en kan aanpassingen verlangen. Hij licht het toestemmingsformulier door om zich ervan te vergewissen dat proefpersonen worden ingelicht over de aard van het onderzoek en over mogelijke risico’s. Zodra het onderzoek is begonnen, licht de raad de voortgang ervan minstens eenmaal per jaar door.

Een zeer urgente kwestie bij institutionele raden van toezicht is of hun werkdruk zo groot is geworden dat hun effectiviteit bij de bescherming van proefpersonen daalt. Toen de Amerikaanse federale overheid in 1999 een onderzoek met proefpersonen in een medisch centrum aan de universiteit van Duke stopzette vanwege onvoldoende bescherming van proefpersonen, liepen er meer dan 2000 onderzoeken. Dat vergt heel veel toezichtswerk. Er zijn kortere toezichtsprocedures voor projecten waarbij proefpersonen slechts een gering risico lopen zoals bij de meeste steekproefonderzoeken. Wanneer een raad overbelast is, is de verleiding groot meer voorstellen in de categorie minimale risico’s te stoppen om het tempo op te voeren.

3.5.2 Informed consent

Beide elementen van dit begrip zijn belangrijk en beide kunnen controversieel zijn. Proefpersonen moeten tevoren *geïnformeerd* (‘informed’) worden over de aard van het onderzoek en het risico dat daar uit voortvloeit. In het geval van een steekproefonderzoek is fysieke schade niet mogelijk. De proefpersonen moet worden verteld welke vragen in het onderzoek worden gesteld en hoeveel tijd het kost. De experimentatoren moeten hun proefpersonen de aard en het doel van het onderzoek vertellen en de mogelijke risico’s schetsen. Proefpersonen moeten vervolgens schriftelijk hun *toestemming* (‘consent’) geven.

Voorbeeld 3.29

Kunnen sommige proefpersonen geen informed consent geven? Er was een periode waarin het gebruikelijk was dat bijvoorbeeld nieuwe vaccins werden getest bij gedetineerden die hun toestemming verleenden in ruil voor een aantekening van goed gedrag. Tegenwoordig maken we ons zorgen dat gedetineerden niet werkelijk vrij zijn om te weigeren. De Amerikaanse wet verbiedt daarom medische experimenten in gevangenissen.

Kinderen kunnen geen informed consent geven. De gebruikelijke procedure is dus om hun ouders daarnaar te vragen. Op een plaatselijke basisschool staat een onderzoek naar nieuwe wegen om te leren lezen op het punt om van start te gaan. Het onderzoeksteam stuurt daarom een formulier aan de ouders. Veel ouders zenden het formulier niet terug. Mogen kinderen aan het onderzoek deelnemen omdat hun ouders geen ‘nee’ hebben gezegd of mogen alleen die kinderen meedoen waarvan de ouders het formulier met een ‘ja’ hebben teruggezonden?

Hoe gaat dat bij onderzoek naar nieuwe methoden van eerste hulpverlening aan patiënten die bewusteloos zijn of een beroerte hebben? In de meeste gevallen is er zelfs geen tijd om de toestemming van familie

te krijgen. Sluit het principe van informed consent praktijkonderzoek van nieuwe behandelingen bij bewusteloze patiënten uit?

Dit zijn vragen zonder duidelijke antwoorden. Er is in alle redelijkheid veel discussie over mogelijk. Informed consent is bepaald geen eenvoudige zaak.⁷

De problemen bij informed consent verdwijnen ook niet als het gaat om intelligente proefpersonen. Sommige onderzoekers, in het bijzonder op medisch gebied, beschouwen toestemming als een barrière om patiënten bij onderzoeken te betrekken. Zij leggen misschien niet alle mogelijke risico's uit. Misschien wijzen ze er niet op dat er andere therapieën zijn die mogelijk beter zijn dan degene die wordt onderzocht. Ze spreken misschien te optimistisch met patiënten zelfs wanneer het toestemmingsformulier alle details correct vermeldt. Aan de andere kant leidt het wijzen op elk mogelijk risico tot zeer lange toestemmingsformulieren die werkelijke barrières gaan vormen. 'Ze lijken op huurcontracten van auto's', aldus een advocaat. Sommige proefpersonen lezen geen formulieren van vijf of zes gedrukte bladzijden lang. Anderen zijn bang voor het grote aantal mogelijke (maar niet waarschijnlijke) rampen die kunnen gebeuren en weigeren om mee te doen. Natuurlijk gebeuren soms onwaarschijnlijke rampen. In dat geval volgen rechtszaken en wordt het toestemmingsformulier steeds langer en gedetailleerder.

3.5.3 Vertrouwelijkheid

Ethische problemen verdwijnen niet op het moment dat een onderzoek is goedgekeurd door de raad van toezicht, de toestemming van de proefpersonen is verkregen en alle feitelijke gegevens van de proefpersonen zijn verzameld. Het is belangrijk om de privacy van de proefpersonen te beschermen door alle persoonlijke gegevens vertrouwelijk te houden. Het verslag van een opiniepeiling vermeldt welk percentage van de 1500 respondenten vond dat legale immigratie moet worden beperkt. Het vermeldt niet wat *u* hebt gezegd over dit of enig ander onderwerp.

Vertrouwelijkheid is niet hetzelfde als **anonimiteit**. Anonimiteit betekent dat de proefpersonen anoniem zijn - hun namen zijn zelfs niet bekend bij de leider van het onderzoek. Anonimiteit is ongebruikelijk bij statistisch onderzoek. Zelfs daar waar anonimiteit mogelijk is (hoofdzakelijk bij onderzoek via een mailing) belemmert het een follow-up om de non-respons te verbeteren of om proefpersonen over de uitkomst te informeren.

Elke vertrouwensbreuk is een ernstige schending van de ethiek bij gegevensbestanden. Een goede gang van zaken is daarom de identiteit van de proefpersonen onmiddellijk te scheiden van de rest van de gegevens. Steekproefonderzoeken bijvoorbeeld gebruiken de identificatie alleen om te controleren wie wel en wie niet antwoordde. In een eeuw met voortschrijdende techniek echter is het niet langer voldoende om te zorgen dat ieder gegevensbestand de privacy van personen beschermt. De overheid bewaart bijvoorbeeld een omvangrijke hoeveelheid informatie over burgers in veel aparte gegevensbestanden: belastingaangiften, gegevens over sociale voorzieningen, gegevens uit onderzoeken zoals een recent bevolkingsonderzoek enzovoort. Veel van deze gegevensbestanden kunnen voor statistische doeleinden met computers worden geraadpleegd. Met doordacht computeronderzoek in verschillende gegevensbestanden is men in staat via het combineren van gegevens *u* te identificeren en heel veel over *u* te weten te komen. Dat geldt zelfs als uw naam of andere identificatie uit de onderzoeksgegevens worden

verwijderd. Een Duitse collega merkte eens op dat ‘een vrouwelijke hoogleraar statistiek met een doctorsgraad uit de V.S.’ gemakkelijk onder alle inwoners van Duitsland is te identificeren. Privacy en vertrouwelijkheid van gegevens zijn klemmende onderwerpen onder statistici in het computertijdperk.

Voorbeeld 3.30

Burgers zijn verplicht aan de overheid informatie te verschaffen. Denk aan belastingaangiften en sociale voorzieningen. De overheid heeft deze gegevens voor administratieve doeleinden nodig, om te zien of ik voldoende belasting betaal en hoe hoog mijn AOW is als ik 65 ben. Sommige mensen vinden dat personen in staat moeten worden gesteld het gebruik van hun gegevens te verbieden zelfs als die gegevens niet meer tot personen te herleiden zijn. Dit zou betekenen dat de overheid geen gegevens mag gebruiken voor onderzoek naar bijvoorbeeld leeftijd, inkomen en gezinsomvang van mensen die een uitkering krijgen. Een dergelijk onderzoek zou wel vitaal kunnen zijn in een debat over herziening van de sociale voorzieningen.

3.5.4 Klinisch onderzoek

Klinische onderzoeken zijn experimenten die de effectiviteit van medische behandelingen op patiënten feitelijk onderzoeken. Bij medische behandelingen kan men baat vinden, maar ze kunnen ook schadelijk zijn. Klinisch onderzoek brengt de ethische kwesties bij experimenten met proefpersonen in het middelpunt van de belangstelling. Hier zijn vertrekpunten voor een discussie:

- Alleen bij gerandomiseerde vergelijkende experimenten zijn de echte effecten van nieuwe behandelingen zichtbaar. Zonder deze experimenten zullen riskante behandelingen, die niet beter zijn dan placebo's, gangbaar worden.
- Klinische onderzoeken bieden veel voordelen, maar het zijn vooral toekomstige patiënten die daar baat bij zullen hebben. De onderzoeken leveren ook risico's op en die worden gelopen door de proefpersonen van het onderzoek. Dus moeten we toekomstige voordelen afwegen tegen huidige risico's.
- Zowel de medische ethiek als de internationale rechtsnormen stellen dat ‘in het medisch onderzoek met mensen [dient] het welzijn van de proefpersoon te prevaleren boven de belangen van de wetenschap en de samenleving.’

De aangehaalde woorden stammen uit de Verklaring van Helsinki van de World Medical Association (WMA), een internationale artsorganisatie. Deze in 1964 voor het eerst gepubliceerde verklaring is een algemeen aanvaarde norm. Tot de ergste voorbeelden van onethische experimenten behoren die waarbij de belangen van de proefpersonen worden verwaarloosd.

Voorbeeld 3.31

In jaren dertig van de vorige eeuw kwam syfilis onder de zwarte bevolking in het Zuiden van de V.S. veel voor. Deze bevolkingsgroep had vrijwel geen toegang tot medische zorg. Een onderzoek van de Public Health Service Tuskegee rekruteerde 399 arme, zwarte deelpachters met syfilis en 201 anderen zonder deze ziekte. Nagegaan werd hoe syfilis zich ontwikkelde als er geen behandeling

werd verstrekt. Vanaf 1943 kwam penicilline voor behandeling van syfilis beschikbaar. Maar de proefpersonen in het onderzoek kregen geen medische behandeling. In feite voorkwam de gezondheidsdienst elke behandeling totdat in de zeventiger jaren dit werd onthuld en de dienst gedwongen werd het onderzoek te staken.

Het onderzoek in Tuskegee is een extreem voorbeeld van onderzoekers die slechts hun eigen belang dienen en het welzijn van hun proefpersonen negeren. In een review in 1996 stond: 'Het onderzoek stond symbool voor racisme in de medische praktijk, ethisch wangedrag bij wetenschappelijk onderzoek, paternalisme bij medici en misbruik van (overheids)bevoegdheden ten opzichte van kwetsbare mensen.' President Clinton bood in 1997 tijdens een bijeenkomst op het Witte Huis formeel zijn verontschuldiging aan de nog levende proefpersonen aan.⁸

Omdat 'het belang van de proefpersoon altijd moet prevaleren' kunnen medische behandelingen in klinische onderzoeken slechts worden getest als er reden is om te veronderstellen dat de patiënten, die proefpatiënt in het onderzoek zijn, er baat bij hebben. Toekomstige baat is niet genoeg om experimenten met proefpersonen te rechtvaardigen. Als er al sterke aanwijzingen zijn dat een behandeling werkt en veilig is, dan is het natuurlijk onethisch om deze *niet* toe te passen. Charles Hennekens van de Harvard Medical School, die leiding gaf aan een groot klinisch onderzoek waarin werd aangetoond dat aspirine het risico op een hartaanval vermindert, verwoordde het als volgt:⁹

Er is een broos evenwicht tussen het wel of niet uitvoeren van een aselect onderzoek. Enerzijds moet er voldoende geloof in de mogelijkheden van het middel zijn om de helft van de proefpersonen verdedigbaar er aan bloot te stellen. Anderzijds moet er voldoende twijfel aan zijn werkzaamheid zijn om deze verdedigbaar te onthouden aan de andere helft van de personen die dan misschien placebo's krijgen toegediend.

Waarom is het ethisch om een controlegroep van patiënten een placebo toe te dienen? Welnu, we weten dat placebo's vaak werken. En ook dat placebo's geen schadelijke bijwerkingen hebben. Dus bij een dergelijk broos evenwicht zoals Hennekens beschreef, krijgt de placebogroep misschien een betere behandeling dan de groep die het middel test. Als we *wisten* welke behandeling beter was, zouden we deze aan iedereen geven. Wanneer we dat niet weten is het ethisch toelaatbaar om beide, middel en placebo, uit te proberen en te vergelijken. Er zijn nog wel lastiger vragen over placebo's te stellen met argumenten voor en tegen.

Voorbeeld 3.32

U test een nieuw geneesmiddel. Is het ethisch toelaatbaar om een placebo aan een controlegroep te verstrekken als een werkzaam geneesmiddel reeds bestaat?

Ja: De placebo vormt goed vergelijkingsmateriaal voor het vaststellen van de effectiviteit van het nieuwe geneesmiddel. Er zijn drie groepen: het nieuwe geneesmiddel, het beste middel tot dusver en de placebo. Ieder klinisch onderzoek kijkt iets af van eerder onderzoek en zelfs werkelijk effectieve behandelingen werken niet in iedere situatie. De controle met placebo's laat zien of het onderzoek zo gebrekkig is dat zelfs het beste middel tot dusver de placebo niet overtreft. Soms komt de placebo als winnaar uit de bus, dus is de twijfel aan het gebruik van het middel gerechtvaardigd. Controle met placebo's is ethisch toelaatbaar behalve bij levensbedreigende ziekten.

Neen: Het is ethisch niet toelaatbaar om patiënten doelbewust een inferieure behandeling te geven. We weten niet of het nieuwe geneesmiddel beter is dan het bestaande, dus moeten ze beide worden gegeven om dat uit te zoeken. Als vorige onderzoeken hebben uitgewezen dat het bestaande geneesmiddel beter is dan de placebo, is het niet langer correct om patiënten een placebo te verstrekken. Immers, het bestaande geneesmiddel impliceert het placebo-effect. Een placebogroep is ethisch alleen toelaatbaar als het bestaande middel van oudere datum is en niet aan geschikte klinische onderzoeken werd onderworpen of als het niet goed werkte of gevaarlijk is.

3.5.5 Gedrags- en sociaal-wetenschappelijke experimenten

Wanneer we naar het terrein van de gedrags- en sociale wetenschappen overstappen, zijn de directe risico's voor de proefpersonen in een experiment minder acuut. Dat geldt ook voor de mogelijke voordelen voor de proefpersonen. Denk bijvoorbeeld aan de experimenten die door psychologen in hun onderzoek naar menselijk gedrag worden uitgevoerd.

Voorbeeld 3.33

Psychologen nemen waar dat mensen een 'persoonlijke ruimte' hebben en geïrriteerd raken als anderen te dichtbij komen. We vinden het niet prettig als in een restaurant vreemden aan ons tafeltje aanschuiven terwijl andere tafels beschikbaar zijn. We zien ook mensen in een lift afstand houden als er genoeg ruimte is. Amerikanen zijn geneigd om meer persoonlijke ruimte op te eisen dan mensen in de meeste andere culturen. Kunnen schendingen van de persoonlijke ruimte zowel fysieke als emotionele effecten veroorzaken?

Onderzoekers gingen aan de slag in een toiletruimte voor mannen. Zij blokkeerden urinalen om binnenkomers te dwingen een urinaal vlak naast een experimentator (behandelgroep) of een urinaal verder van de experimentator (controlegroep) vandaan te gebruiken. Een andere experimentator die vanuit een ander ruimte een periscoop gebruikte, klokte de tijd die proefpersoon nodig had om te gaan urineren en hoe lang hij daarover deed.¹⁰

Dit experiment met de persoonlijke ruimte illustreert de problemen van hen die gedragsonderzoeken opzetten en beoordelen.

- Er is geen risico voor letsel voor proefpersonen hoewel zij zeker bezwaar zouden maken tegen het bespied worden met een periscoop. Waartegen zouden we proefpersonen beschermen wanneer fysiek letsel onwaarschijnlijk is? Tegen mogelijk emotioneel letsel? Onwaardige situaties? Aantasting van de privacy?
- Hoe staat het met informed consent? De proefpersonen in voorbeeld 3.33 wisten zelfs niet dat ze aan een experiment deelnamen. Veel gedragsexperimenten steunen op het verbergen van het ware doel van het onderzoek. De proefpersonen zouden hun gedrag veranderen als ze tevoren hadden gehoord waar de onderzoekers op zouden letten. Aan de proefpersonen wordt toestemming gevraagd op basis van vage informatie. Ze ontvangen na afloop van het experiment volledige informatie.

De 'Ethical Principals' (ethische beginselen) van de American Psychological Association eisen toestemming tenzij een onderzoek zich beperkt tot het bestuderen van gedragingen in een publieke ruimte. Zij staan misleiding alleen toe wanneer het voor het onderzoek nodig

is. Er mag geen informatie worden achtergehouden die van invloed kan zijn op de bereidheid van de proefpersoon om deel te nemen. Een en ander moet zo spoedig aan de proefpersonen worden uitgelegd. Het onderzoek naar de persoonlijke ruimte (uit de jaren zeventig) voldoet niet aan de huidige ethische maatstaven.

We constateren dat het basisvereiste bij informed consent heel verschillend wordt begrepen op medisch en op psychologisch terrein. Hier is een voorbeeld van een andere situatie met weer een andere interpretatie van wat ethisch is. De proefpersonen krijgen geen informatie en geven geen toestemming. Ze weten zelfs niet dat ze bij een experiment worden betrokken wanneer ze een nacht in de cel doorbrengen.

Voorbeeld 3.34

Hoe moet de politie reageren op meldingen van huiselijk geweld? In het verleden was het een gebruikelijke praktijk om de dader uit het huis te halen en hem een bevel te geven de nacht elders door te brengen. De politie aarzelde om aanhoudingen te verrichten omdat de slachtoffers zelden een aangifte deden. Vrouwengroepen betoogden dat het aanhouden van daders toekomstig geweld zou voorkomen zelfs bij gebrek aan een aangifte. Zijn er aanwijzingen dat door aanhouding het aantal toekomstige overtredingen vermindert? Met experimenten werd een antwoord op deze vraag gezocht.

Een bij huiselijk geweld gebruikelijk experiment vergelijkt twee behandelingen: aanhouding van de verdachte en hem een nacht vasthouden of de verdachte waarschuwen en wegzenden. Als politieagenten bij 'moeilijkheden binnen' worden geroepen, kalmeren zij de betrokkenen en stellen zij een onderzoek in. Bij bedreiging met wapens of met de dood volgt aanhouding. Als de feiten een aanhouding toestaan maar niet vereisen, vraagt een agent het hoofdbureau om instructies. De dienstdoende functionaris opent de eerste envelop op een stapel die tevoren door een statisticus is voorbereid. De enveloppen bevatten de behandelingen in een aselechte volgorde. De politie houdt de verdachte aan of waarschuwt hem en zendt hem weg afhankelijk van de inhoud van de envelop. De onderzoekers bestuderen vervolgens het politiejournaal en bezoeken het slachtoffer om te zien of het huiselijke geweld zich herhaalt.

Uit een eerste experiment bleek aantoonbaar dat het aanhouden van verdachten van huiselijk geweld leidde tot daaropvolgend minder gewelddadig gedrag. Op basis van deze aanwijzingen werd aanhouding het gebruikelijke antwoord van de politie op huiselijk geweld.

Experimenten met de aanpak van huiselijk geweld wierpen licht op een belangrijk onderwerp van het overheidsbeleid. Maar er was geen sprake van informed consent. Ethische regels voor klinische en de meeste sociaal-wetenschappelijke onderzoeken verbieden deze experimenten. Deze experimenten werden toegestaan door toezichthoudende raden omdat, in de woorden van een van de onderzoekers naar huiselijk geweld, 'deze mensen proefpersonen werden door het begaan van de daden op grond waarvan de politie ze arresteerde. Je hebt geen toestemming nodig om iemand te arresteren.'

Opgaven bij paragraaf 3.5

De meeste opgaven in deze paragraaf stellen kwesties ter discussie. Er zijn geen goede of foute antwoorden maar er zijn wel antwoorden waar wel of niet goed over is nagedacht.

- 3.100** U bent lid van een raad van toezicht op uw universiteit of hogeschool. U moet beslissen of verscheidene onderzoeksvoorstellen moeten worden aangepast omdat zij enkele minimale risico's voor proefpersonen met zich meebrengen. Overheidsregels zeggen dat 'minimale risico's' betekenen dat de risico's niet groter zijn dan 'die welke bestaan in het dagelijkse leven of tijdens het uitvoeren van een fysieke handeling of psychologisch onderzoek dan wel testen.' Dat is vaag. Welke van de volgende voorbeelden kwalificeert u als 'minimaal risico'?
- Voor een druppel bloed wordt in de vinger geprikt om bloedsuiker te meten.
 - Neem bloed af uit de arm voor een serie bloedonderzoeken.
 - Plaats een buisje in de arm zodat er regelmatig bloed kan worden afgenomen.
- 3.101** Overheidsregels eisen dat institutionele raden van toezicht uit minstens vijf personen bestaan onder wie minstens een wetenschapper, een niet-wetenschapper en een persoon van buiten het instituut. De meeste raden zijn groter maar hebben slechts één buitenstaander als lid.
- Waarom moeten in een raad van toezicht ook mensen zitten die geen wetenschapper zijn?
 - Bent u van mening dat één buitenstaander voldoende is? Hoe kiest een dergelijk lid? Zou u bijvoorbeeld voor een doctor in de medicijnen kiezen? Of voor een geestelijke? Of voor iemand die opkomt voor de rechten van de patiënt?
- 3.102** Uw hogeschool of universiteit heeft een raad van toezicht die alle onderzoeken screent waarbij proefpersonen betrokken zijn. Bestudeer een document dat een dergelijke raad beschrijft (waarschijnlijk eenvoudig te vinden op het internet).
- Wat zijn de taken van een dergelijke raad volgens dat document?
 - Uit hoeveel leden bestaat de raad? Hoeveel leden zijn geen wetenschapper? Hoeveel leden zijn geen werknemer van het instituut? Bezitten deze leden een bijzondere expertise of zijn ze alleen maar buitenstaander?
- 3.103** Een onderzoeker vermoedt dat traditionele geloofsovertuigingen in verband te brengen zijn met een autoritaire persoonlijkheid. Ze bereidt een vragenlijst voor die autoritaire tendensen meet en ook veel religieuze vragen bevat. Beschrijf het doel van dit onderzoek voor proefpersonen om hun nadrukkelijke toestemming te verkrijgen. U moet balanceren tussen conflicterende doelen: u mag de proefpersonen niet misleiden over datgene wat de vragenlijst over hen zegt; u mag uw steekproef niet vertekenen door religieuze mensen af te schrikken.

3.104 In welke van de hierna te noemen omstandigheden zou u het verzamelen van persoonlijke gegevens toestaan zonder de toestemming van de proefpersonen?

- Een overheidsbureau neemt een aselechte steekproef van de aangiften voor de inkomstenbelasting om informatie te verkrijgen over het inkomen in verschillende beroepen. Alleen de inkomens en de beroepen worden vastgelegd uit de aangiften, niet de namen.
- Een sociaal psycholoog woont een openbare bijeenkomst bij van een religieuze groep om de gedragspatronen van de leden te bestuderen.
- De sociaal-psycholoog doet net alsof ze lid wil worden van een religieuze groep en woont besloten bijeenkomsten bij om de gedragspatronen van de leden te bestuderen.

3.105 Studenten die Psychologie 001 nemen, zijn gedwongen om als experimenteel proefpersoon te dienen. Studenten in Psychologie 002 worden niet gedwongen, maar krijgen extra beloning als ze wel doen. Studenten in Psychologie 003 zijn gedwongen of in te tekenen als proefpersoon of een paper te maken. Studenten zijn zeker afhankelijk van hun docenten. Hebt u bezwaar tegen het beleid van deze cursus? Zo ja, welk bezwaar en waarom?

3.106 Onderzoekers van Yale die met medische teams in Tanzania werken, wilden weten hoe vaak een besmetting met aids voorkomt onder zwangere vrouwen in dat land. Zij stelden hiervoor een plan op om bloed af te nemen bij zwangere vrouwen.

De raad van toezicht van Yale stond erop dat de onderzoekers de informed consent van elke vrouw verkrijgen en haar informeren over de resultaten van de test. Dit is een gebruikelijke procedure in ontwikkelde landen. De Tanzaniaanse regering wilde de vrouwen niet vertellen waarom bloed werd afgenomen en ze ook niet informeren over de uitslag van de test. De regering vreesde paniek als het erop zou uitdraaien dat veel mensen een ongeneeslijke ziekte hebben waarop de medische voorzieningen in het land niet zijn berekend. Het onderzoek werd afgelast. Vindt u dat Yale gelijk had om de gebruikelijke standaarden voor de bescherming van proefpersonen te hanteren?

3.107 Een van de belangrijkste niet-gouvernementele onderzoeken in de V.S. is de General Social Survey (GSS), een permanent onderzoek naar de leefsituatie, van het National Opinion Research Center. De GSS peilt de publieke opinie over een gevarieerde reeks politieke en maatschappelijke onderwerpen. De interviews worden bij de geïnterviewden thuis afgenomen. Zijn de antwoorden van de geïnterviewden anoniem, vertrouwelijk of beide? Verklaar uw antwoord.

3.108 Texas A&M biedt zoals veel universiteiten gratis screenen aan op hiv, het virus dat aids veroorzaakt. In de aankondiging staat: 'Degenen die zich opgeven voor een screenen op hiv krijgen een nummer en hoeven geen naam op te geven.' Zij krijgen de uitslag per telefoon, eveneens zonder hun naam op te geven. Biedt deze procedure *anonimiteit* of alleen *vertrouwelijkheid*?

- 3.109** Enkele gebruikelijke procedures lijken misschien anonimiteit aan te bieden terwijl ze in feite alleen vertrouwelijkheid verstrekken. Marktonderzoekers gebruiken vaak enquêtes per post waarbij niet naar de identiteit van de respondent wordt gevraagd, maar die wel verborgen codes bevatten die de identiteit prijsgeven. Een onwaar beroep op anonimiteit is duidelijk onethisch. Als slechts vertrouwelijkheid wordt beloofd, is het dan ook onethisch om niets te zeggen over de identificatiecode, misschien omdat respondenten geloven dat hun antwoorden anoniem blijven?
- 3.110** Lang geleden namen artsen bloed af van u als onderdeel van de behandeling van bloedarmoede. U wist niet dat het monster was opgeslagen. Onderzoekers zijn nu van plan de opgeslagen monsters van u en vele anderen te onderzoeken op genetische factoren die bloedarmoede beïnvloeden. Het is niet langer mogelijk uw toestemming te vragen. Met moderne technologie kan men een volledig genetisch plaatje van u maken uit uw bloedmonster.
- Vindt u dat het beginsel van informed consent wordt geschonden als men uw bloedmonster gebruikt wanneer uw naam er op staat, maar u niet verteld is dat het opgeslagen wordt voor een later onderzoek?
 - Veronderstel dat uw identiteit niet aan het monster is verbonden. Van het bloedmonster is slechts bekend dat het komt van (ongeveer) ‘een 20-jarige blanke vrouw die voor bloedarmoede is behandeld.’ Is het nu correct om het monster voor onderzoek te gebruiken?
 - Misschien moeten we biologisch materiaal zoals bloedmonsters van patiënten slechts gebruiken indien zij toestaan dat het materiaal wordt opgeslagen voor later gebruik in een onderzoek. Het is niet mogelijk van tevoren te zeggen om wat voor een onderzoek het gaat, dus valt het niet onder de gebruikelijke normen voor informed consent. Is het niettemin acceptabel om volledige vertrouwelijkheid te bieden naast het feit dat het gebruik van het monster geen fysieke schade aan de patiënt aanricht?
- 3.111** Onderzoekers naar verouderingsprocessen stelden voor het effect van gezondheids-supplementen op de kwaliteit van het leven van ouderen te onderzoeken. Geschikte patiënten in de registers van een grote medische kliniek werden aselect aangewezen voor behandeling en voor controlegroepen. De te behandelen groep kreeg gehoorapparaten, kunstgebitten, vervoer en andere diensten die zonder kosten niet voor de controlegroep beschikbaar waren. De raad van toezicht vond dat het verstrekken van deze diensten aan sommigen maar niet aan anderen in dezelfde instelling ethische vragen oproept. Bent u het daarmee eens?
- 3.112** Werkzame geneesmiddelen voor de behandeling van aids zijn erg duur. De meeste Afrikaanse landen kunnen ze daarom niet aan grote aantallen mensen verstrekken. Maar aids komt in delen van Afrika meer voor dan ergens anders. In verscheidene klinische onderzoeken wordt gekeken naar wegen om te voorkomen dat zwangere vrouwen die hiv hebben, de infectie overdragen op hun ongeborn kind, wat in Afrika een belangrijke bron van besmetting met hiv is. Sommige mensen zeggen dat deze onderzoeken onethisch zijn omdat ze geen werkzame geneesmiddelen tegen aids aan de patiënten

verstrekken zoals dat in rijke landen gebeurt. Anderen antwoorden daarop dat de onderzoeken zijn gericht op behandelingen die in de Afrikaanse omstandigheden kunnen werken. Voor de kinderen van de proefpersonen zijn hier op zijn minst voordelen aan verbonden. Wat vindt u?

- 3.113** Een van de belangrijkste doelen van het aidsonderzoek is om een vaccin te vinden dat beschermt tegen het hiv-virus. Omdat aids in delen van Afrika veel voorkomt is dit werelddeel de gemakkelijkste plaats om een vaccin te testen. Maar het is waarschijnlijk dat een vaccin zo duur is dat het niet (althans niet in het begin) op grote schaal in Afrika zal worden gebruikt. Is het uit een ethisch oogpunt correct om in Afrika te testen als het profijt daarvan hoofdzakelijk naar de rijke landen gaat? De behandelgroep zou het vaccin krijgen en de placebogroep eerst op een later moment, als bewezen is dat het werkzaam is. Dus de huidige proefpersonen hebben er baat bij. De toekomstige baten verdwijnen naar elders. Wat vindt u?
- 3.114** De campagne voor de presidentsverkiezingen is in volle gang en de kandidaten hebben opiniepeilers ingehuurd om regelmatig via peilingen uit te zoeken hoe kiezers over kwesties denken. Welke informatie kan van de peilers worden gevraagd om te verstrekken?
- Welke eisen stelt de norm bij informed consent aan de informatie die peilers aan potentiële respondenten verstrekken?
 - De normen die peilingbureaus hebben geaccepteerd, eisen ook dat de respondenten naam en adres krijgen van de organisatie die de peiling uitvoert. Waarom denkt u dat dit wordt geëist?
 - Het peilingbureau heeft gewoonlijk een professionele naam zoals 'Samples Incorporated'. Respondenten weten niet dat de peiling door een politieke partij of kandidaat wordt betaald. Zou het noemen van de sponsor tot vertekening van de peiling leiden? Behoort de sponsor altijd aan te kondigen wanneer de uitslag van de peiling wordt bekend gemaakt?
- 3.115** Sommige mensen vinden dat de wet moet eisen dat alle politieke peilingen bekend worden gemaakt. In het andere geval kunnen de bezitters van de peilingresultaten de informatie ten eigen bate aanwenden. Ze kunnen handelen op basis van de informatie, alleen geselecteerde delen vrijgeven of het vrijgeven timen voor het beste effect. De organisatie van een kandidaat antwoordt dat zij voor de peiling betaalt om informatie voor eigen gebruik te krijgen, niet voor het amuseren van het publiek. Bent u een voorstander van een compleet vrijgeven van de uitkomsten van politieke peilingen? Wat denkt u van particuliere enquêtes zoals marketingonderzoek naar de smaak van de consument?
- 3.116** Bij de volkstelling van 2000 werden 53 gedetailleerde vragen gesteld, bijvoorbeeld:

Hebt u in dit huis, appartement of caravan VOLLEDIGE sanitaire voorzieningen, d.w.z. 1) heet en koud stromend water 2) een doorspoeltoilet en 3) een badkuip of douche?

Het formulier vraagt ook naar inkomen in dollars, gesplitst naar de bron, en of er enige ‘fysieke, mentale of emotionele aandoening’ u hindert bij ‘het leren, herinneren of concentreren.’ Enkele congresleden hadden bezwaar tegen deze vragen hoewel het congres ze had goedgekeurd.

Geef korte argumenten voor beide kanten van het debat over het formulier: de regering mag zulke informatie op legitieme wijze gebruiken, maar de vragen lijken diep in iemands privacy in te grijpen.

- 3.117** Gegevens van de overheid zijn vaak vrij of tegen geringe kosten verkrijgbaar voor particulieren. Satellietgegevens over het weer bijvoorbeeld, die door het nationale weersinstituut worden geproduceerd, zijn vrij beschikbaar voor weerberichten op tv-stations en voor iedereen op internet. *Mening 1:* Overheidsinformatie moet voor iedereen beschikbaar zijn tegen minimale kosten. Europese regeringen echter laten tv-stations voor weerinformatie betalen. *Mening 2:* Satellieten zijn duur en tv-stations hebben profijt van hun weerdiensten dus sparen zij kosten uit. Welke mening steunt u en waarom?

- 3.118** De Centers for Disease Control and Prevention vragen in een enquête onder jongeren aan proefpersonen of zij seksueel actief waren. Degene die met ‘ja’ antwoordde werd vervolgens gevraagd:

Hoe oud was je toen je ‘het’ voor het eerst deed?

Moeten ouders toestemming geven om minderjarigen te ondervragen over seks, drugs en andere kwesties, of is toestemming van de minderjarigen voldoende? Geef bij uw mening ook de argumenten.

- 3.119** Studenten geven zich als proefpersoon op bij een psychologisch experiment. Wanneer ze zich melden, worden ze gevraagd om in de wachtkamer plaats te nemen omdat de interviews wat zijn uitgelopen. De onderzoekers ensceneren vervolgens een diefstal van een waardevol object dat in de wachtkamer is achtergelaten. Sommige proefpersonen zijn alleen met de dief, anderen zijn in tweetallen. Deze behandelingen worden met elkaar vergeleken. Zal de proefpersoon de diefstal rapporteren? De studenten hadden ingestemd met deelname aan een niet gespecificeerd onderzoek. De ware aard van het experiment werd ze na afloop verteld. Vindt u dat dit onderzoek ethisch verantwoord is?
- 3.120** Een psychologe begeleidt het volgende experiment: ze meet de houding van proefpersonen ten opzichte van afkijken en laat ze vervolgens een getruukt spel spelen dat niet kan worden gewonnen zonder af te kijken. De computer die het spel organiseert legt ook zonder medeweten van de proefpersonen vast of ze wel of niet afkijken. Daarna wordt de houding ten opzichte van afkijken opnieuw getest. Proefpersonen die afkijken, neigen ertoe hun houding te wijzigen en afkijken acceptabeler te vinden. Zij die de verleiding konden weerstaan, waren geneigd bij de tweede test afkijken nog sterker

te veroordelen. Deze uitkomsten bevestigen de theorie van de psychologe. Dit experiment lokt proefpersonen uit af te kijken. De proefpersonen worden in de waan gelaten dat zij in het geheim konden afkijken, terwijl ze in feite werden geobserveerd. Is dit experiment ethisch ontoelaatbaar? Verklaar uw opstelling.

Noten

1. Gegevens van G. A. Sacher en E. F. Staffelt, 'Relation of gestation time to brain weight for placental mammals: implications for the theory of vertebrate growth', *American Naturalist*, 108(1974), blz. 593–613. We vonden deze gegevens bij F. L. Ramsey en D. W. Schafer, *The Statistical Sleuth: A Course in Methods of Data Analysis*, Duxbury, 1997.
2. Er zijn verscheidene wiskundige manieren om te laten zien dat $\log t$ past in de machtenfamilie bij $p = 0$. Hier is er een. Voor machten $p \neq 0$ is de onbepaalde integraal $\int t^{p-1} dt$ een veelvoud van t^p . Als $p = 0$, $\int t^{-1} dt$ is $\log t$.
3. Gegevens van de Wereldbank: *1999 World Development Indicators*. De schatting van de levensverwachting is voor 1997 en de GDP per capita (koopkrachtpariteit) voor 1998.
4. Gegevens van de Energy Information Administration, weergegeven in Robert H. Romer, *Energy: An Introduction to Physics*, W.H. Freeman, 1976, voor 1880 tot en met 1972, en in *International Energy Annual* voor de volgende jaren.
5. De kansen in dit voorbeeld zijn ontleend aan het artikel van Benjamin A. Barnes, "An overview of the treatment of end-stage renal disease and a consideration of some of the consequences," in J. P. Bunker, B. A. Barnes, en F. W. Mosteller (red.), *Costs, Risks and Benefits of Surgery*, Oxford University Press, New York, 1977, pp. 325-341. In dit artikel staat een realistische analyse.
6. John C. Bailar III, 'The real threats to the integrity of science', *The Chronicle of Higher Education*, 21 april 1995, blz. B1–B2.
7. De problemen met de interpretatie van voorschriften over nadrukkelijke toestemming en de werkzaamheden van institutionele raden van toezicht bij medisch onderzoek vormen een belangrijk thema in Beverly Woodward, 'Challenges to human subject protections in U.S. medical research', *Journal of the American Medical Association*, 282(1999), blz. 1947–1952. In dit artikel wordt aan andere onderzoeken gerefereerd.
8. Citaat uit *Report of the Tuskegee Syphilis Study Legacy Committee*, 20 mei 1996. Een gedetailleerde anamnese is James H. Jones, *Bad Blood: The Tuskegee Syphilis Experiment*, Free Press, 1993.
9. De woorden van dr. Henneken komen uit een interview in een videoserie *Against All Odds: Inside Statistics* van de Annenberg/Corporation for Public Broadcasting.
10. R.D. Middlemist, E.S. Knowles en C.F. Matter, 'Personal space invasions in the lavatory: suggestive evidence for arousal', *Journal of Personality and Social Psychology*, 33(1976), blz. 541–546.